مقدمة في نظرية الإحتمالات

Introduction to Probability Theory

الدكتور
جبار عبد مضحي



Introduction to Probability Theory

رقـــــــم التصـــــنيف : 519.5

المؤلف ومن هو في حكمه : جبار عبد مضحي

عنــــــوان الكـــــتاب : مقدمة في نظرية الاحتمالات

رقــــــم الإيـــــداع : 2010/7/2639

الــــواصـــــفــــــات : نظرية الاحتمالات / الاحصاء الرياضي

بـــيانــــات الـــنشــر : عمان - دار المسيرة للنشر والتوزيع

تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

الطبعة الأولى 2011م – 1432هـ



عنوان الدار

الرئيسي : عمان - العبدلي - مقابل البنك العربي هاتف : 5627049 6 962+ فاكس : 5627059 6 962+

الفرع : عمان - ساحة المسجد الحسيني - سوق البتراء هاتف : 4640950 6 962+ فاكس : 4617640 6 962+

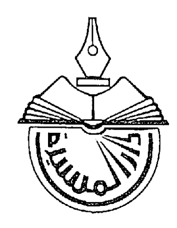
صندوق بريد 7218 عمان - 11118 الأردن

E-mail: Info@massira.jo . Website: www.massira.jo

مقدمة في نظرية الإحتمالات

Introduction to Probability Theory

الدكتور
جبار عبد مضحي



الإهـــــداء

إلى من فارقوا الحياة منذ أن كنت صغيراً...

لهم الرحمة من الله سبحانه وتعالى.

إلى من رافقت مشوار حياتي......زوجتي.

إلى إخوتي في وطني العزيز...

إلى بناتي اللاتي يطمحن في العلم والتعلم.

إلى أصدقائي الذين فارقتهم منذ زمن...

إلى أساتذتي الذين علموني...

إلى زملائي في المهنة...الذين وقفوا إلى جانبي في اليمن السعيد.

إلى جميع أبناء وطني ...

أهدي هذا الجهد المتواضع

الفهرس

الفصل الثالث

المتغيرات العشوائية المتقطعة والتوزيعات الاحتمالية

الفصل الرابع

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة

الفصل الخامس

المتغيرات العشوائية المستمرة والتوزيعات الاحتمالية

الفصل السادس

التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة

الفصل السابع

التوزيعات الثنائية

الفصل الثامن

التوزيعات الاحتمالية الثنائية الخاصة

الفصل التاسع

بعض توزيعات الإحصاء الاستدلالي

الفصل العاشر

توزيعات المعاينة

المقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خاتم المرسلين محمد بن عبد الله الصادق الأمين.

أما بعد:

نظراً لاتساع عملية التعامل مع الاحتمالات وتوزيعاتها ،إذ أصبح لها تطبيقات كثيرة ومتعددة في مختلف مجالات الحياة ،وأصبح هذا الموضوع يدرس في مختلف دور العلم من مدارس ومعاهد وجامعات ، وبسبب أهميته والحاجة الماسة إليه من قبل طلبتنا الأعزاء ، لذا قمت بوضع هذا الكتاب بين أيدي طلبتنا الأعزاء ،وحاولت أن أغني الموضوع من بعض المصادر المهمة ، حيث إذ تناولت أمثلة كثيرة في كل فصل لإغناء وتوضيح ما ورد من تعاريف أو نظريات.كما وضعت في نهاية كل فصل عدد من التمارين وذلك للمساعدة في التدريب على المواضيع ولتحسين قدرة القارئ على فهم هذه المادة.

تضمن هذا الكتاب عشرة فصول ، كان أولها قد تناول مفهوم نظرية المجموعات وبعض أسسها وقوانينها وذلك لكونها تلعب دوراً كبيراً في التعامل مع نظرية الاحتمالات، أما الفصل الثاني تضمن مقدمة عامة عن مفهوم الاحتمال وجميع النظريات والبديهيات المتعلقة بها،وتضمن الفصل الثالث المتغيرات العشوائية المتقطعة وما يتعلق بها من تعاريف ونظريات معززة بالأمثلة ، أما الفصل الرابع فقد تضمن التوزيعات الاحتمالية المتعلقة بالمتغيرات العشوائية المتقطعة، ثم تضمن الفصل الخامس المتغيرات العشوائية المستمرة بينما وضِعت توزيعاتها الخاصة في الفصل السادس،وقد كان الفصل السابع يتضمن المتغيرات العشوائية ذات البعدين سواء كانت متقطعة أم مستمرة وقد أُغنيت بشكل مفصل بالأمثلة، في حين وضِعت توزيعاتها الخاصة في الفصل الثامن من هذا الكتاب وقد تضمن الفصل التاسع بعض

توزيعات الإحصاء الاستدلالي وبشكل خاص توزيعي ستيودنت(t)وتوزيع فيشر(F) ثم تناولنا في الفصل الأخير من هذا الكتاب توزيعات المعاينة من اجل وضع أو إعطاء صورة مناسبة عن الجانب التطبيقي لنظرية الاحتمالات.

واني إذ أضع هذا المؤلف لابد من التأكيد على أنني استفدت كثيراً من تجربتي التدريسية لهذه المادة وكذلك لما وجدتهُ في بعض المؤلفات الأجنبية والعربية من مداخل لإغناء هذه النظرية، وأتمنى أن يلقى هذا المؤلف قبولاً في الوسط العلمي ليكون مرجعاً يغني مكتبتنا العربية ويقدم للقاري نموذجاً علمياً سواء بالنسبة لطلبتنا أو أساتذتنا المختصين بهذه المادة، كما ارجوا أن يكون لملاحظاتهم دور في إغناء تجربتي المستقبلية وأخيراً أُقدم شكري وامتناني للأستاذ الدكتور محمد احمد لطف الجوفي عميد كلية التربية (النادرة) لدعمهِ المتواصل لي خاصةً وللبحث والتأليف عامة ،كما أُقدم شكري لجميع أساتذة قسم الرياضيات لتعاونهم معي،ولابد هنا من تقديم الشكر والامتنان للدكتور رافد رشيد والدكتور محمد وليد أستاذا اللغة العربية القديرين لمراجعتهما اللغوية لفصول للكتاب.

المؤلف

نظرية المجموعات

1-1 تعاريف وأمثلة

1-2 عمليات على المجموعات

1-3 قانون دي مورجان

1-4 الفرق التناظري

1-5 الضرب الديكارتي

1-6 صف المجموعات

1-7 المجموعة المحدودة من الأعلى

1-8 المجموعة المحدودة من الأدنى

1-9 المجموعة المعدودة

1-10 المجموعة الغير معدودة

تمارين الفصل الأول



الفصل الأول

نظرية المجموعات

Set Theory

تُعتبرالمجموعة من أهم المفاهيم الأساسية في العلوم الرياضية ، إذ بُنيت على أساسها نظرية المجموعات(Set Theory)،وأسس لها ولأول مرة في الرياضيات العالم الألماني (George Cantor)عام(1845-1918)، وواصل بعدهُ كثير من العلماء الرياضيين، وتناول هذا الموضوع في فروع مختلفة من الرياضيات ومنها الجبر المجرد والمنطق الرياضي والتبلوجي،...ومن ثم في نظرية الاحتمالات.[1]

وسنقدم في هذا الفصل بعض المفاهيم الأساسية من نظرية المجموعات وخاصة ما يتعلق منها بمفردات هذا الكتاب:

1-1 تعاريف وأمثلة Definitions And Examples

فيما يأتي بعض التعاريف والأمثلة المهمة التي نضعها لكي يتعرف عليها القارئ للاستفادة منها في الفصل الاحق.

1-1-1 المجموعة Set

هي تجميع عدد من الأشياء المتميزة والمعرفة بشكل جيد والتي يعبر عنها باستخدام حروف كبيرة($A,B,C,....$) ويرمز لعناصرها بحروف صغيرة($a,b,c,..$).

مثال1-1

$A = \{ 4 , 5 , 9 , 2 , 1 \}$

$N = \{ 1 , 2 , 3 , ... \}$

$B = \{ a , b , c , ... \}$

$S = \{ x \in N : 5 \leq x \leq 10 \}$

2-1-1 المجموعة الخالية Empty set

هي المجموعة التي لا تحتوي على العناصر ويرمز لها بالرمز(ϕ) وهـي في حقيقـة الأمر مجموعة وحيدة.

مثال 1-2

مضاعفات العدد (5) بين الصفر و الواحد هي مجموعة خالية وتساوي ϕ.

3-1-1 المجموعتان المتساويتان:

نقول إن المجموعة A تساوي المجموعة B إذا تكونتا من العناصرنفسها.أو كانـت كل واحدة منها مجموعة جزئية من الأخرى أي أن:

$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

مثال 1-3

$$A = \{ x \in N , 4 \le x \le 12 \}$$
$$B = \{ 4,5,6,7,8,9,10,11,12 \} \Rightarrow A = B$$

4-1-1 المجموعة الجزئية Subset

نقول أن المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كان كل عنصر مـن A هو عنصر من B وتكتب $A \subseteq B$ ونقول إن A مجموعة جزئية فعلية(proper subset) من B إذا وجد عنصر من B لا ينتمي إلى A وتكتب ($A \subset B$) وبذلك يكون تعريـف المجموعة الجزئية على هذا الأساس هو:

$$A \subset B \Rightarrow a \in A, a \in B$$

مثال 1-4

لتكن $A = \{ 2,4,6 \}$ و $B = \{ 1,5,2,4,6 \}$ فإن $A \subset B$

2-1 عمليات على المجموعات Operations on Sets

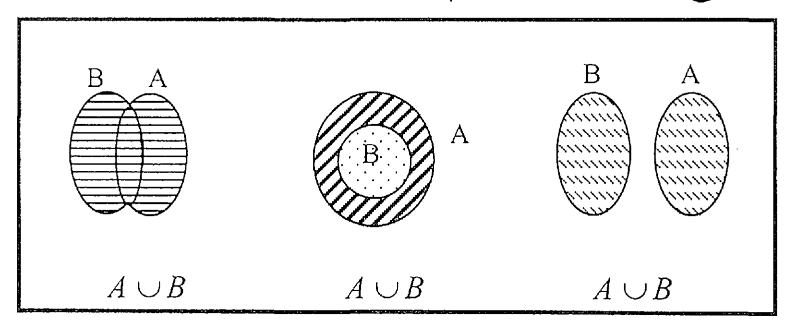
هناك مجموعـة عمليـات يمكـن إجراءهـا علـى المجموعـات للحـصول علـى مجموعات جديدة ويمكن تلخيصها بما يأتي :

1-2-1 اتحاد مجموعتين Union of Sets

إذا كانت A وB مجموعتين فان اتحاديهما هو جميع العناصر التي تنتمي إلى كل منهما أو كليهما ويرمز له بالرمز($A \cup B$) أي أن:

$$A \cup B = \left\{ x : x \in A \quad or \quad x \in B \right\}$$

ولتوضيح ذلك ببعض الرسوم من أشكال فن:



مثال1-5

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 5, 6, 8, 10\} \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 8, 10\}$

من تعريف الاتحاد نستنتج مايلي:

1. $A \subseteq A \cup B$
2. $B \subseteq A \cup B$
3. $A \cup \Phi = A$
4. لأي ثلاث مجموعات فان: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2-2-1 تقاطع مجموعتين Intersection

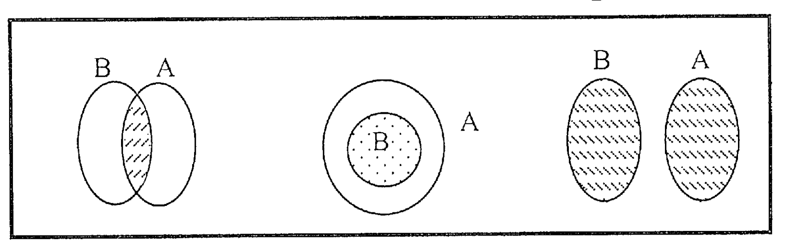
إذا كانت A و B مجموعتين فان تقاطعهما هو جميع العناصر المشتركة بينهما ويرمز له بالرمز($A \cap B$) أي إن:

$$A \cap B = \left\{ x : x \in A \quad and \quad x \in B \right\}$$

نلاحظ في المثال(1-5) أعلاه إن:

$A \cap B = \{2\}$

ويمكن تمثيل التقاطع بالأشكال أدناه:



ومن تعريف التقاطع نستنتج أن:

1. $A \cap B \subseteq B$
2. $A \cap B \subseteq A$
3. $A \cap \phi = \phi$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. لأي ثلاث مجموعات فان: $(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$
6. وتكون الخاصية المختلطة من الاتحاد والتقاطع هي:

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

3-2-1 الفرق بين المجموعات Sets Difference

إذا كانت A و B مجموعتين فان الفرق بينهما هو المجموعة التي تتكون من جميع عناصر المجموعة A والتي لا تنتمي إلى المجموعة B، يرمز لها بالرمز $(A - B)$ أي إن :

$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

في المثال (1-5) فان:

$A - B = \{1, 3\}$

4-2-1 المجموعتان المنفصلتان Disjoin Sets

المجموعتان A, B مجموعتان منفصلتان، إذا كان $A \cap B = \phi$ لا يوجد عناصر مشتركة بينهما .

مثال6-1

لتكن $A=\{4,9,11\}$ و $B=\{1,5,7\}$ فهل أن A,B منفصلتان ؟

بما أن $A\cap B=\phi$ فان المجموعتان منفصلتان .

5-2-1 المجموعة المكملة Complement Set

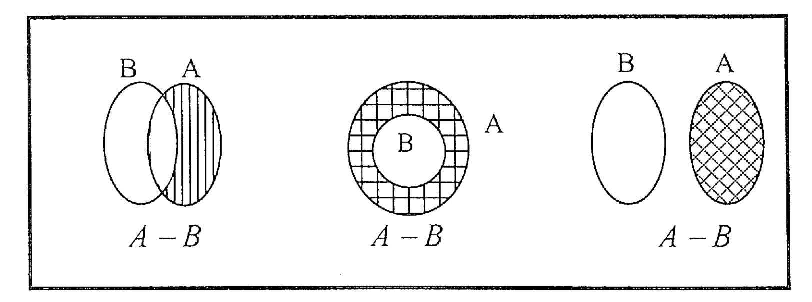
إذا كانت $A\subseteq B$ فان $A-B$ يسمى مكملة المجموعة B بالنسبة للمجموعة A ويرمز له بالرمز (A°). وإذا كانت U تمثل مجموعة شاملة فان :

$$A^{\circ}=\{x\in U : x\notin A\}$$

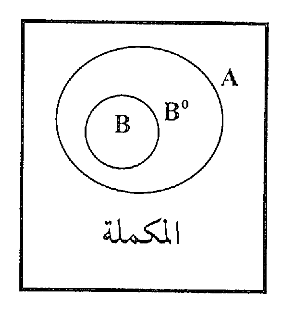
ومن خصائص المتممة:

1. $A=(A^{\circ})^{\circ}$
2. $U^{\circ}=\phi$ و $\phi^{\circ}=U$
3. $A\subseteq B\Rightarrow B^{\circ}\subseteq A^{\circ}$
4. $A=B\Leftrightarrow A^{\circ}=B^{\circ}$
5. $A\cap A^{\circ}=\phi$
6. $A\cup A^{\circ}=U$
7. $U\cup\phi=U$
8. $U\cap\phi=\phi$

ويمكن تمثيل الفرق والمكملة بالإشكال الآتية:



الشكل المظلل يمثل الفرق A-B



وفيما يأتي بعض خواص المجموعات:

- إذا كانت U مجموعة شاملة و A و B مجموعتين جزئيتين منها فان:

1. $A-B=A\cap B^{\circ}$
2. $A-\phi=A, A-A=\phi$
3. $A^{\circ}-B^{\circ}=B-A$
4. $A-B=\phi \Leftrightarrow B\subseteq A$

- إذا كانت U مجموعة شاملة وA وB وC مجموعات جزئية منها فان:

1. $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$
2. $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

3-1 قانون دي مورجان De Morgan's Law

لتكن S مجموعة ، إذا كانت $C\subset S$ وكانت C° مكملة C في S ($C^{\circ}=S-C$) فانه لأي $A,B\subset S$ يكون:

1. $(A\cap B)^{\circ}=A^{\circ}\cup B^{\circ}$
2. $(A\cup B)^{\circ}=A^{\circ}\cap B^{\circ}$

4-1 الفرق التناظري Symmetric Difference

إذا كانت A و B مجموعتين ،نسمي ($(A+B)$ أو $(A\Delta B)$ بالفرق التناظري للمجموعتين وهو جميع عناصر B التي لا تنتمي إلى A وجميع عناصر A التي لا تنتمي إلى B أي إن :

$$A+B=(A-B)\cup(B-A)$$

وبذلك نستطيع إن نعرف الفرق التناظري كما يأتي:

$A+B=(A\cap B^{c})\cup(B\cap A^{c})$

وان $A+B=B+A$ و $(A+B)+C=A+(B+C)$

ملاحظة:

إذا كانت T تمثل مجموعة كل الأدلة(Index Set) فانه لكل $t\in T$ و A_t مجموعة يكون :

1. $\underset{t\in T}{\cup} A_t=\{x:\exists t\in T, x\in A_T\}$

2. $\underset{t\in T}{\cap} A_t=\{x: if t\in T, x\in A_t\}=\{x:\forall t\in T, x\in A_t\}$

5-1 الضرب الديكارتي Cartesian Product

يسمى حاصل الضرب الديكارتي أو الجداء لمجموعتين A وB بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة التي مركبتها الأولى من A ومركبتها الثانية من B ويرمز لها بالرمز AXB أي أن: $AXB=\{(a,b):a\in A\wedge b\in B\}$، إذ أن (a,b) يمثل زوج مرتب.

6-1 صف المجموعات

نسمي صف مجموعات A أو قوة A، بأنه المجموعات المتكونة من كل المجموعات الجزئية من A. ونرمز له بالرمز $P(A)$ أي أن:

$P(A)=\{X:X\subseteq A\}$.

إن صف المجموعة دائماً غير خالٍ لان ϕ و A من ضمن عناصر $P(A)$.

مثال 7-1

إذا كانت $A=\{a,b\}$ فاوجد $P(A)$ ؟

الحل

$P(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},A\}$

ملاحظة:

عدد المجموعات الجزئية يساوي 2^n ،حيث أن n يمثل عدد عناصر المجموعة الأصلية A .

سنرمز إلى $n(A)$: للدلالة على عدد عناصر المجموعة A .

ونرمز إلى $n(P(A))$:عدد المجموعات الجزئية للمجموعة A .

مثال 1-8

إذا كانت $A=\phi$ فاوجد $n(A)$ ، $P(A)$ ، $n(P(A))$ ؟

الحل

$n(A)=0$ لان المجموعة A خالية من العناصر.

$P(A)=\phi$ وان $n(P(A))=2^0=1$ وهو يمثل عدد المجاميع الجزئية.

1-7 المجموعة المحدودة من الأعلى Upper Bound

إذا كانت $A \subset R$ فنسمي A مجموعة محدودة من الأعلى إذا وجد عدد مثل M بحيث أن $A \leq M$ ونسمي M حداً أعلى للمجموعة A .

مثال 1-9

لتكن $A=\{2,7\}$ فان $A \leq 7$ لكل $a \in A$. لذلك فان 7 هو الحد الأعلى للمجموعة A .

1-8 المجموعة المحدودة من الأدنى Lest Bound

إذا كانت $A \subset R$ فنسمي A مجموعة محدودة من الأدنى إذا وجد عدد مثل M بحيث أن $A \geq M$ ونسمي M حداً أدنى للمجموعة A .

1-8-1 المجموعة المحدودة من الأدنى والأعلى

نقول إن A محدودة من الأدنى والأعلى إذا كانت A محدودة .

مثال1-10

لتكن $A =\{ -2,7 \}$، هل أن A مجموعة محدودة ؟ اوجد حديها الأعلى والأدنى؟

نلاحظ أن للمجموعة حداً أعلى هو 7 وحداً أدنى هو(-2) لذلك فهي مجموعة محدودة حسب التعريف .

مثال1-11

لتكن $A =\{ 2 ,\infty\}$ فهل أنها محدودة أم لا ؟

بما أن A ليس لها حدَ أعلى وإنما لها حدَ أدنى فقط هو 2 فهي حسب التعريف ليست محدودة .

1-8-2 اكبر حد أدنى للمجموعة

إذا كانت A مجموعة وان $b \in A$ هو اكبر حداً أدنى فان b هو اصغر من أي عنصر لكل $a \in A$.

1-8-3 اصغر حد أعلى للمجوعة

إذا كانت A مجوعة وان $b \in A$ هو اصغر حداً أعلى فان b هو اكبر من أي عنصر لكل $a \in A$.

1-9 المجموعة المعدودة Countable Set

إذا كانت A مجموعة منتهية فيمكن عد عناصرها ، وتسمى المجموعة المعدودة .

1-10 المجموعة الغير معدودة Uncountable Set

إذا كانت A مجموعة غير منتهية فانه لا يمكن عد عناصرها ، ونسميها مجموعة غير معدودة .

مثال 1-12

لتكن $A =\{ 1, 2 ,3 ,......, n\}$ فما عدد عناصرها ؟

عدد عناصرها n .

ملاحظة:

- المجموعة الخالية ϕ عدد عناصرها =0 .
- مجموعات الأعداد التالية جميعا مجموعات لا نهائية N,Z,Q,R .

تمارين الفصل الأول

1. برهن أن : $(A\cap B)-C=(A\cap B)-(A\cap C)$ ثم أرسم شكل هذه المجموعة بطريقة فن؟

2. برهن أن : $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$ ثم أرسم شكل هذه المجموعة بطريقة فن؟

3. إذا كانت $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ مجموعة شاملة وان:

$D=\{1,3,5,10\}$ ، $C=\{1,2,4,5\}$ ، $B=\{2,4,5,6,9\}$

$A=\{1,3,5,7\}$ ، مجموعات جزئية من U،أوجد

كل من $(C\cap D0-A$ ، $B\cap B$ ، A° ، $A-D$ ، AUB ، $[(A-C)-D]^{\circ}-B$ ؟.

4. ليكن X,Y,Z,T أربع مجموعات ،برهن أن:

$(X-Y)-Z=X-(Y\cup Z)=(X-Y)\cup(X-Z)$ ؟

5. إذا كانت A و B مجموعتين فبرهن أن $(A+B)+C=A+(B+C)$ ؟

6. لتكن U مجموعة شاملة و A و B مجموعتين جزئيتين منها، برهن أن :

$$A-B=A\cap B^{\circ}$$

7. لتكن A و B و C ثلاث مجموعات فبرهن أن:

$$A\cap(BUC)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

8. لتكن المجموعة $A=Z$ وأن $B=\{4/_n : n\in Z\mid\{0\}\}$ ، أوجد $A\cap B$ ؟

9. أُكتب مجموعة الأعداد الطبيعية التي تأخذ قيماً اقل من 5 ؟

10. لتكن X و Y مجموعتين،استنتج أن :

$X\cap Y=X\cup Y$ أذا وفقط إذا كان $X=Y$ ؟

11. إذا كانت $A=\{a,b.c.d\}$ فاوجد كلٍ من $n(A)$ ، $P(A)$ ، $n(P(A))$ ؟

12. لتكن $A=\{x : x\in N\mid\{0\},x\leq 10\}$

$B = \left\{ x : x \quad odd \quad nutaral \quad number < 10 \right\}$

أوجد كل من $B - A$ ، $A - B$ ، $A \cup B$ ، $A \cap B$ ؟

الفصل الثاني

مقدمة في الاحتمالات



الفصل الثاني

مقدمة في الاحتمالات

INTRODUCTION TO PROBABILITY

1-2 مقدمة Introduction

لكي ندرس الظواهر الطبيعية (Natural Phenomena) التي لا تُحكم بقوانين معروفة أو محدودة فإننا يجب أن نحصل على معلومات عادةَ تكون على شكل بيانات لعينة ما. ومثال على ذلك ، في تجربة البستنة مثلاً تُجمع بيانات عن خصائص الإنتاج لنوع محدد من الحنطةَ، التي زُرعت في عدد من المناطق الزراعية .وكذلك في طرق مراقبة الجودة فان عينات معينة من المواد تُؤخذ بشكل دوري من عملية الإنتاج وتخضع للفحص.وفي بعض الدراسات الاقتصادية، نلاحظ أن مؤشر النشاط الاقتصادي يتغير خلال فترة من الزمن ، وهكذا .

لقد دُرست طرق ترتيب وتلخيص البيانات وعرضها في موضوع الإحصاء، ولكن الهدف الرئيس(Major Objective) لأغلب الأبحاث هو تجاوز عملية التلخيص هذه ووضع استنتاجات للمجتمع من العينة المأخوذة ، ,ولذ فان نظرية الاحتمال تزودنا بالأساس المنطقي(Logical Foundation) لجعل الإحصاء الاستدلالي (Statistical Inference) يستخدم بيانات العينة في دراسة المجتمع .

إن فكرة الحظ(Chance) أو عدم التأكد (Uncertainty) نُلاحظها يوميا في الحياة فمثلا(من غير المحتمل أو غير المتوقع بان المطر ينزل غداً) أو (فريق كرة القدم x يملك قليلاً من الحظ للفوز على فريق y) في مثل هذه الحالات ، فان الفرد يُعبر بطريقة غير دقيقة عن موقفه حول احتمال أن الحدث سيحصل بشكل أكيد أو لا، كذلك عندما نقول إن احتمال سحب ورقة (من نوع القلب)من مجموعة واحدة من ورق اللعب عددها(52)ورقة هو $\frac{1}{4}$ فان ما نُعنيه في الحقيقة هواننا إذا ما سحبنا ورقة

واحدة من مجموعة ورق اللعب فإننا نتوقع أن نحصل على ورقة من نوع (القلب)في $\frac{1}{4}$ مرات السحب وذلك لان عدد أوراق (القلب) في المجموعة هو (13).إذن فان الاحتمال هو $\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$.

شَهِد القرنان السادس عشر والسابع عشر اهتماماً بارزاً بهذا النوع من الدراسات والبحوث حيث كانت الظروف مواتية لذلك في تلك الفترة، إذ أن العاب المقامرة بورق اللعب ورمي حجر النرد كانت منتشرة في قصور المترفين في أوربا خاصة في فرنسا ،وقد شعر المقامرون بحاجتهم إلى أسس علمية تساعدهم على حساب فرصهم في الكسب أو الخسارة ،فلجئوا إلى علماء الرياضيات أمثال باسكال(PASCAL)وفرمات (FERMAT)

وبرنولي(BERNOULLI)،وغيرهم وهنا كانت نقطة البدء في إجراء دراسات جدية في علم الاحتمال.[1]

ولذلك نعتَبر الاحتمالات التي تدخلُ فيها فرصة الحدوث قيماً كمية وسنتعامل معها على هذا الأساس.

وفي هذا الفصل نتطرق إلى مقدمة عن نظرية الاحتمالات وان مفهوم الاحتمال يستخدم في التجربة العشوائية وللحديث عن هذه النظرية لابد من ذكر بعض الأمثلة عن التجارب العشوائية لكي نقدم مفهوم فضاء العينة والحدث ومن هذه الأمثلة ما يأتي:

1. سحبت مادتين من عملية معينة ولكل عملية لاحظ أيهما معيبة أو صالحة.
2. عدد المرضى الذين ينتظرون دورهم في عيادة الطبيب يتغير من وقت إلى آخر ويجب أن لا يزيد عددهم عن عشرين مريضا.
3. أعطي مخدر إلى مرضى يعانون من حالة عدوى معينة إلى أن لوحظت عليهم استجابة.
4. قياس طول فترة بقاء أداة الكترونية تم اختبارها تحت درجة حرارة متطرفة.

5. أعطي حيوان معين حمية غذائية معينة ولوحظ التغير في الوزن وطول الجسم له خلال فترة محددة.

نلاحظ انه لأي من التجارب أعلاه بأننا لا نستطيع توقع الناتج بدون شك، ولكننا نستطيع أن نصف العدد الكلي للنتائج الممكنة.وبذلك استطعنا أن نعرف التجربة العشوائية وفضاء العينة والحدث البسيط وإعطاء بعض الأمثلة عنها.

2-2 تعاريف أساسية Basic Definitions

1-2-2 التجربة العشوائية Random Experiment

وهي التجربة التي تكون جميع نتائجها معروفة مقدماً ولكن لايمكن التنبؤ بأي نتيجة منها بالتحديد أي ماذا سيحصل مقدماً وكذلك فإنها يمكن أن تكرر عدد من المرات .

وعلى هذا الأساس فان التجربة العشوائية ينتج عنها مجموعة من الأحداث (Events) وكل حدث فيها يكون مستقلاً عن الحدث الآخر وان وقوع هذا الحدث، إنما يخضع لعامل الصدفة.

لكي نتمكن من إعطاء أمثلة جيدة تساعد في تحليل هذه النظرية يتوجب علينا، أن نتطرق إلى عدة تجارب ومنها تحديداً تجربة رمي قطعة النقود (Tossing a Coin) ، وتجربة رمي حجر النرد (Rolling a Dice) ، وكذلك تجربة ورق اللعب (Playing a Cards) لأننا على علم بنتائج هذه التجارب مقدماً حيث أن تجربة رمي قطعة النقود تعطينا نتيجتين هما: الصورة(H) والكتابة(T) ،وأن احتمالية وقوعهما متساوية وتساوي $\frac{1}{2}$ ، أما بالنسبة لرمي حجر النرد فان التجربة تعطينا ستة نتائج هي $\{1,2,3,4,5,6\}$ وان احتمالية أو فرصة ظهور أي عنصر منها تساوي $\frac{1}{6}$ وهكذا يمكن التعامل مع أي تجربة عشوائية ، وبناءاً على ذلك فانه يتوجب علينا معرفة كل النتائج المحتملة للتجربة العشوائية ومنه سوف نتعرف على :

2-2-2 فضاء العينة Sample Space

هو الفضاء الذي يحتوي على جميع نتائج تجربة عشوائية معينة ويرمز له بالرمز S .[2]

ولتوضيح ذلك فان:

نتائج التجربة العشوائية الخاصة برمي قطعة النقود مرة واحدة هي 2 أي أنها $\{H,T\}$.

نتائج التجربة العشوائية الخاصة برمي قطعة النقود مرتين هو 4 أي أنها $\{HH,TH,HT,TT\}$.

نتائج التجربة العشوائية الخاصة برمي قطعة النقود ثلاث مرات هي 8 أي أنها $\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$.

وهكذا فان نتائج التجربة العشوائية لرمي قطعة النقود n من المرات هي 2^n .وبنفس الأسلوب تكون نتائج التجربة العشوائية لرمي حجر النرد مرة واحدة هي 6 أي إنها $\{1,2,3,4,5,6\}$.

وفي حالة رمي الحجر مرتين فنحصل على 36 احتمال هي كما يأتي:

$$\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & . & . & . & (2,6) \\ (3,1) & . & . & . & . & (3,6) \\ (4,1) & . & . & . & . & . \\ (5,1) & . & . & . & . & . \\ (6,1) & . & . & . & . & (6,6) \end{Bmatrix}$$

وبذلك تكون نتائج التجربة العشوائية لرمي حجر النرد n من المرات هو 6^n.

ومن المثالين أعلاه نستنتج ما يأتي :

1. إن عدد عناصر التجربة العشوائية مرفوعاً إلى n يمثل جميع نتائج تجربة ما، وتكون الاحتمالات كلها لها نفس فرصة الظهور أي $P(x)=\frac{1}{6}$ وتسمى الاحتمالات المنتظمة أو المتماثلة (Equally Likely Events).
2. إن فضاء العينة لأي تجربة عشوائية يمثل نتائج تلك التجربة وبذلك يمكننا تحديد فضاء العينة لأي تجربة عشوائية . نلاحظ أن الفضاءات أعلاه تحتوي عدد

منتهـي مـن الأعـداد (Finite Numbers) ويـسمى الفـضاء بأنـه فـضاء عينـة معدود(Countably Finite Sample Space) أمـا إذا احتـوى علـى عـدد غـير منتهــي مــن الأعــداد فيقــال عنــه فــضاء عينــه غــير معــدود غــير منتهــي (Unaccountably Infinite Sample Space).

3-2-2 الحدث Event

يعرف الحدث بأنه مجموعة جزئية من فضاء العينـة أي إننـا إذا رمزنـا للحـدث بالرمز A فان $A \subseteq S$.

ملاحظة :

يكون الحدث حدثاً بسيطاً إذا تكون من عنصر واحد فقط ويسمى حدثا مركبـا إذا تكون من أكثر من عنصر ويـسمى حـدثا صـفرياً إذا لم يحـوِ علـى أي عنـصر أمـا الحدث الأكيد فهو ذلك الحدث الذي يحوي على جميع عناصر فضاء العينة .

مثال 2-1

أجريت تجربة عشوائية بان رميت قطعة نقود مرتين وكان ناتج التجربة هو كالآتي : $S = \{HH,TH,HT,TT\}$ ولـــيكن الحـــدث $A = \{TH,TT\}$ والحـــدث $B = \{HH,HT\}$ نلاحظ أن كل من B,A هي أحداث جزئية من فـضاء العينـة S .

مثال 2-2

رمي حجر نرد مرةَ واحدة فما هو فضاء العينة ؟

إن فـضاء العينـة هـو $S =\{1,2,3,4,5,6\}$ وان $A =\{1,2,3\}$ هـو حـدث جزئــي مــن فــضاء العينــة وهــو يمثــل الأعــداد الفرديــة ، كــذلك فــان $B =\{2.4.6\} \subseteq S$ وهو يمثل الأعداد الزوجية .

4-2-2 الحدث الخالي Empty Event

هو الحدث المستحيل (Impossible Event) ومثال على ذلك إذا رمينـا حجـر النرد فان احتمال أن نحصل رقم 7 يمثل حدثا خالياً أي أن $A = \phi$.

5-2-2 الأحداث المنفصلة Disjoint Events

إذا كان كل من B, A حدثين ، فإننا نقول عنهما حدثان منفصلان إذا وإذا فقط كان $A \cap B = \phi$.

أي لايمكن حدوثهما معاً ومثال على ذلك عند رمي حجر نرد فانه لايمكن الحصول على وجهين في وقت واحد.

6-2-2 الأحداث المتصلة Joint Events

إذا كان كل من B, A حدثين ، فإننا نقول عنهما حدثان متصلان إذا وإذا فقط كان $A \cap B \neq \phi$.

إذا كان B, A أحداثاً فان $A \cup B$ و $A \cap B$ ، $A - B$ ، A° ..... كلها تمثل أحداثاً .

ملاحظة:

سوف نرمز إلى $A \cap B$ من الآن ولاحقاً بالرمز AB وذلك للاختصار.

مثال 2-3 (يترك تمرين):

رمي حجر نرد مرةَ واحدة وحصلنا على الأحداث الآتية :

$$A = \{ d : d \geq 2 \} = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$B = \{ d : d \leq 3 \} = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$C = \{ d : d \leq 1 \} = \{ 1 \}$$

اوجد كل من $A \cup B, A \cap B, A \cup C, A^{\circ}, B^{\circ}, ...$ ؟.

3-2 الاحتمالية البسيطة Simple Probability

في أي تجربة إذا كان عدد العناصر المتوقعة للتجربة هو n وكان عدد مرات ظهور الحادث A هو m فان الاحتمالية للحادث A يمكن أن تعرف كما يلي :

$$P(A) = \frac{|m|}{s}$$

أي انه يمثل عدد عناصر الحدث A مقسوماً على جميع عناصر فضاء العينة S . وبذلك نستطيع حساب القيمة الاحتمالية لأي حدث .

في بعض التجارب لايمكن تحديد فضاء العينة لذلك فان الأحداث البسيطة تؤخذ على أنها متساوية الحدوث على حد سواء وفي مثل هذه الحالات يكون من الضروري الأخذ بالاعتبار تكرار وقوع الحدث عندما تعاد التجربة تحت شروط متشابهه وكمثال على ذلك لتكن لدينا تجربة إطلاق عدد محدد من القذائف ،أي نختبر إطلاق 20 قذيفة تحت شرط معين ونسجل نتائج الضربات على الهدف إذا أصابت الهدف تسمى(H) وإذا أخطأت الهدف تسمى (M) فيتكون لدينا تكرار نسبي (Relative Frequency) ويحسب من العلاقة الآتية:[2]

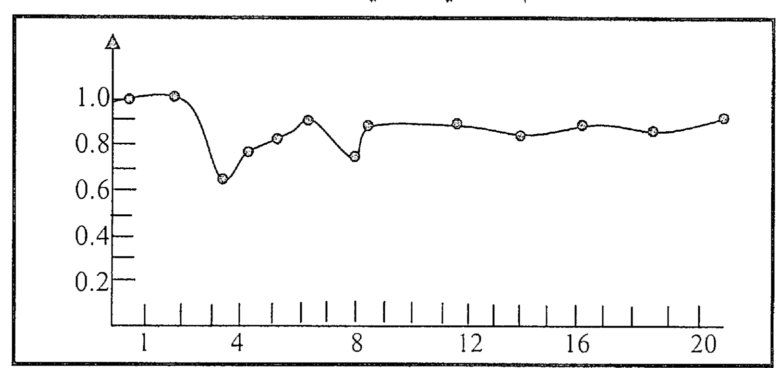
التكرار النسبي للضربات في n من المحاولات=عدد الضربات في n من الأطلاقات مقسوماً على العدد الكلي للأطلاقات أي أن:

$$r(H)=\frac{number \quad of \quad H \quad in \quad N \quad firings}{N}$$

نتائج التجربة كما يلي:

التكرار النسبي(R.F)	النتيجة	عدد الاطلاقات
.001	H	1
.001	H	2
.670	M	3
.750	H	4
.800	H	5
.830	H	6
.710	M	7
.750	H	8
.780	H	9
.700	M	10
.730	H	11
.750	H	12
.770	H	13
.790	H	14
.800	H	15
.810	H	16
.820	H	17
.780	M	18
.790	H	19
.800	H	20

ويمكن تمثيل ذلك بالرسم البياني التالي:



ويظهر من الرسم البياني بان التكرار النسبي يكاد يثبت كلما تكررت المحاولات ولهذا سنتعامل مع الأحداث التي لها نفس فرصة الظهور عند تكرار المحاولات وعلية نخمن بان احتمالية الإصابة تكون(0.8) ولكننا لايمكن أن نقول مقدماً أي اختبار سيعطينا تصويبه ناجحة ، وعليه فان ثبات التكرار النسبي سيجعلنا نعرفه بأنه عدد مرات تكرار الحدث مقسوما على العدد الكلي للتكرار وبذلك نكون قد وضعنا الدليل التجريبي لتخصيص قيمة عددية للمقدار $P(A)$ الذي يمثل احتمالية الحدث A .

إن قيمة الاحتمال يرمز لها بالرمز Pr أو P وهي دالة منطلقها فضاء العينة ومداها هو الفترة المغلقة $[0,1]$ أي أن :

$$P : S \to R_{[0,1]}$$

مثال 2-4

إذا رُميت قطعة نقود مرتين وكان $A = \{HH, TT\}$ حدثاً منها، احسب احتمالية الحدث A ؟

الحل

بما إن فضاء العينة $S = \{ HH, TH, HT, TT \} = 4$

فان: $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

مثال 2-5

إذا كان لدينا كيس بداخله 8 كرات حمراء و3 كرات بيضاء فما احتمال أن نسحب كرة ما لا على التعيين فتكون كرة بيضاء ؟

الحل

عدد الحالات الممكنة = 11

عدد الكرات البيضاء = 3

وعليه فان احتمال سحب كرة بيضاء = $\frac{3}{11}$.

مثال 2-6

إذا كان هناك 4 أعضاء من مجلس إدارة إحدى الشركات هم (A,B,C,D) مرشحون لاختيار اثنين منهم للشركة في احد المؤتمرات فما:

a) احتمال اختيار العضوين A أو D ؟

b) احتمال اختيار العضوين A و D ؟

c) احتمال عدم اختيار العضو A ؟

الحل

فضاء العينة أو عدد الحالات الممكنة هو:

$S=\{AB\,,AC\,,AD\,,BC\,,BD\,,CD\}=6$ ومن خلاله نلاحظ بان عدد حالات الاختيار هي كما يلي:

(عدد حالات اختيار العضو $A = 3$ A فيكون $(P(A)=\frac{3}{6}$.

عدد حالات اختيار A أو $D = 5$ فيكون $P(A \quad or \quad D)=P(A\cup D)=\frac{5}{6}$.

عدد حالات اختيار A و $D = 1$ فيكون $P(A,D)=P(A\cap D)=\frac{1}{6}$.

عدد حالات عدم اختيار $A = 3$ فيكون $P(A^{\circ})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

ملاحظة:

إن قيمة دالة الاحتمال تعتمد بالدرجة الأساس على معرفة جميع احتمالات فضاء العينة الممكنة وهذه الحالة يمكن إيجادها في الحالات البسيطة ، أما إذا كان عدد الأحداث كبير جدا ففي هذه الحالة يكون من الصعوبة تحديد فضاء الاحتمال ولهذا نلجأ إلى بعض الطرق الرياضية التي تساعدنا في تحديد مثل هذه الحالات مهما زاد عدد الاحتمالات ومن أهم هذه الطرق هي :

4-2 التباديل Permutation

هي عملية ترتيب n من الأشياء في مجاميع كل منها يتألف من r من الأشياء وحسب القاعدة الاتية :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{حيث إن} \quad n,r \in I^+$$

مثال 2-7

اوجد عدد الطرق الممكنة التي بها يمكن ترتيب أربع كرات مرقمة من 1-4 ؟

الحل

بما أن العملية هي عملية ترتيب إذن:

$$P_4^4 = \frac{4\,!}{(4-4)\,!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{0\,!} = 24 \quad \text{لان} \quad 0\,! = 1$$

مثال 2-8

اوجد عدد الطرق الممكنة التي يمكن بها وضع خمس كرات في صندوقين بحيث أن كل صندوق يحتوي على كرة واحدة فقط ؟

الحل

$$P_2^5 = \frac{5\,!}{(5-2)\,!} = \frac{5\,!}{3\,!} = \frac{5 \times 4 \times 3\,!}{3\,!} = 20$$

أما في حالة وجود تكرارات في مفردات المجموعة فان عدد الطرق الممكنة للترتيب يمكن أن تحسب من العلاقة الآتية :

$$p^{n}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$ حيث إن $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

مثال 2-9

اوجد عدد الطرق الممكنة لترتيب (7) كرات أربعة منها بيضاء واثنان منها حمراء والباقي ألوان أخرى ؟

الحل

بما أن هناك تكرارات في المجموعة أثناء عملية ترتيب الكرات فإننا نستخدم العلاقة الآتية :

$P^{7}_{4,2,1} = \frac{7!}{4!\,2!\,1!} = 105$ وهي تمثل عدد العينات الممكنة .

2-4-1 قاعدة الضرب

تستخدم لترتيب عدد من الظواهر التي يمكن ترتيبها في n_1 حيث تمثل النتائج التي تظهر في المرحلة الأولى و n_2 تمثل النتائج التي تظهر في المرحلة الثانية وان كل ناتج من المرحلة الأولى مرتبط مع كل ناتج من المرحلة الثانية وهكذا يكون العدد المتوقع للنتائج هو $n_1 n_2$ ولتعميم هذه النتيجة فان: $n_1 n_2 \ldots\ldots n_r$ حيث أن $r = 1, 2, \ldots\ldots, i$ (إن r, i أعداداً صحيحة) .

مثال 2-10

يرغب شخص بتناول وجبة خفيفة تتضمن سندوتش وحلوى وشراب ، فإذا كان هناك 10 أنواع مختلفة من السندوتش و6 أنواع مختلفة من الحلوى و8 أنواع مختلفة من الشراب ، فكم عدد الاختيارات المتوفرة ؟

الحل

عدد الاختيارات للوجبة $n_1 n_2 n_3 = 10 \times 6 \times 8 = 480$ وذلك لان الاختيار في كل مرحلة مرتبط مع المراحل الأخرى.

مثال 2-11

كم عدد ثلاثي يمكن تكوينه من الأرقام 1,2,3,4,5 بحيث لا يتكرر ظهور الرقم في أي من هذه الأعداد ؟

الحل

$5\,! = 5 \times 4 \times 3 = 60$ أي أن هناك ثلاثة أماكن حيث يملأ المكان الأول بخمسة طرق والثاني بأربعة طرق والثالث بثلاثة طرق وبالنتيجة يكون عدد الطرق 60 طريقة.

2-4-2 قاعدة الجمع

تستخدم إذا كان لدينا عدة عمليات تتم بعدة طرق أي أن :

$n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k$.

مثال 2-12

إذا كان لدينا (3) باصات و(5) قطارات فبكم طريقة يمكن تنظيم رحلة بحيث يتم استخدام القطار والباص ؟

الحل

حسب قاعدة الجمع فان :عدد الطرق = عدد الباصات +عدد القطارات =

$8=5+3$

2-5 التوافيق Combination

هي عملية اختيار أو انتخاب عدد من المفردات بحجم r من مجموعة كبيرة بحجم n وبدون ترتيب ويتم حساب ذلك من العلاقة الآتية :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ حيث أن $n, r \in I^+$

مع ملاحظة بعض الخواص :

$$\binom{n}{n} = 1 , \binom{0}{0} = 1 , \binom{n}{1} = n , \binom{n}{0} = 1$$

مثال 2-13

اوجد عدد العينات التي يمكن تكوينها من مجتمع مؤلف من ست مفردات بحيث يكون حجم ألعينه لمفردتين اثنتين فقط ؟

الحل

نطبق التوافيق، لان العملية هي عملية اختياراي أن :

$$\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!(6-2)!}=\frac{6!}{2!4!}=\frac{6\times5\times4!}{2!4!}=15$$ نحصل على 15 عينة .

مثال 2-14

اوجد عدد اللجان التي يمكن تأليفها من أربعة أفراد بحيث أن كل لجنة تحتوي على ثلاثة أفراد ؟

الحل

نستخدم التوافيق لإيجاد عدد اللجان أي أن :

$$\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!(4-3)!}=4$$ عدد اللجان هو 4 .

2-5-1 علاقة التباديل والتوافيق

هنالك علاقة تنشأ بين كل من التباديل والتوافيق ويمكن استنتاجها كالآتي :

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}=\frac{P_r^n}{r!}$$

مثال 2-15

اثبت أن $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$ ؟ (البرهان يعتمد على قوانين التوافيق).

2-5-2 نظرية ذي الحدين

من خلال مفكوك نظرية ذي الحدين يتضح لنا إن، معاملات النظرية هي عبارة عن توافيق ولهذا فان المعاملات عبارة عن مفكوك وكما يأتي :

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

وبذلك نحصل على :

$$=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots\ldots+b^n$$

وتسمى المعاملات $\binom{n}{n},\ldots\ldots,\binom{n}{1},\binom{n}{0}$ بمعاملات ذات الحدين .

يمكن إثبات نظرية ذي الحدين باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي ويترك للطالب البرهان.

مثال 2-16

اثبت أن $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$ ؟

البرهان

نأخذ الطرف الأيسر

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!}$$

نأخذ العامل المشترك ونوحد المقامات فنحصل

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left[1+\frac{n-k}{k+1}\right]$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left[\frac{k+1+n-k}{k+1}\right]$$

$$=\frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)![n-k+1-1]!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}=\binom{n+1}{k+1}$$

يمكن إثبات الخاصية التالية: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ ؟

البرهان

نأخذ الطرف الأيمن

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

نأخذ الطرف الأيسر

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

وبذلك نحصل على تساوي الطرفين.

تعريف 2-1

إذا كان $n_1, n_2, ..., n_k$ أعدادا صحيحة غير سالبة فان :

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k \Rightarrow \binom{n}{n, n_{21}, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! ...... n_k!}$$

مثال 2-17

اوجد قيمة $\binom{7}{2,3,2}$ ؟

الحل

$$\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2!3!2!} = 210$$

مثال 2-18

إذا لدينا 10 كرات وأردنا وضعها في صندوقين بحيث اخترنا منها أربعة كرات بشكل عشوائي وتم وضع 5 كرات في كل صندوق بحيث يكون 3 منها بيضاء وواحدة حمراء في المرة الأولى و 4 سوداء ولا أي كرة حمراء في المرة الثانية ،فما احتمالية اختيار الكرات في المرتين ؟

الحل

نفرض إن B, A يمثل حدثي اختيار الكرات وبما أن الحدثين منفصلان، لأنه لا توجد عناصر مشتركة بينهما فان:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

وحساب

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3} \times \binom{5}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{10 \times 5}{210} = \frac{5}{21}$$

وبنفس الأسلوب فان: $P(B) = \frac{\binom{5}{4} \times \binom{5}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{5 \times 1}{210} = \frac{5}{21}$ من العلاقتين نحصل على:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{21} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21}$$

6-2 بديهيات الاحتمال Axioms of Probability

هنالك ثلاث بديهيات مهمة تستند عليها نظرية الاحتمال وهذه البديهيات تعتبر مسلمات حقيقية لايمكن البرهنة عليها وهي :

1. إذ كان $A \subseteq S$ أي انه حدثا جزئياً من فضاء العينة فان $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(S) = 1$.
3. إذا كان $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots$ سلسلة من الأحداث المنفصلة فان

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n \ldots\ldots) = p(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots + P(A_n) \ldots$$

وبعبارة أخرى يمكن القول إن : $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

وكحالة خاصة من البديهية الثالثة فان :إذا كان كل من A و B حدثين منفصلين، فان $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

مثال 2-19

رميت قطعة نقود($coin$) ثلاث مرات ،احسب احتمالية الحصول على ظهور حرف T مرتين؟

الحل

ليكن الحدث $A = \{HHT, HTH, THH\}$ هو احتمال ظهور T من بين جميع عناصر فضاء العينة S والتي هي 8 عناصر ولذلك فان : $P(A) = \frac{3}{8}$.

مثال 2-20

أجريت تجربة لإعطاء حيوان محفز معين ، فأما أن تحصل استجابة R أو لا تحصل استجابة N. إذا أعطي المحفز إلى *(3)* حيوانات ، أنشا مخطط فن يبين فضاء العينة وبين الأحداث الآتية:

1. A يمثل على الأقل *(2)* حيوان يستجيب.
2. B يمثل الحيوان الثالث يستجيب.

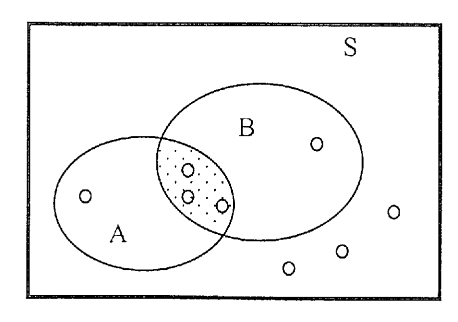
الحل

بما أن عناصر التجربة هي R و N ولدينا ثلاث حيوانات فان فضاء العينة= $2^3 = 8$.وعناصر فضاء العينة هي:

$S = \{RRR, RRN, RNR, NRR, RNN, NRN, NNR, NNN\}$ وبذلك يكون

$A = \{RRR, RRN, RNR, NRR\}$ يمثل استجابة اثنين على الأقل.

$B = \{RRR, RNR, NRR, NNR\}$ يمثل استجابة الثالث.والشكل أدناه يوضح ذلك:



والآن نستطيع أن نعرف بعض العمليات الأساسية للأحداث فلأي حدثين A و B يكون اتحاد حدثين $(A \cup B)$ هي مجموعة الأحداث البسيطة في فضاء العينة التي تكون أما في A أو في B أو في كليهما. وان عملية الاتحاد تعني أنه على الأقل واحد من A و B يحدث.

أما عملية التقاطع $(A \cap B)$ للأحداث فتعني مجموعة جميع الأحداث البسيطة التي تعود إلى كل من A و B،وهي تعني إن كلاهما يحدثان.في حين أن متممة الحدث A تعني مجموعة جميع الأحداث البسيطة التي لا تنتمي إلى A ويرمز لها A^{c} .

وبذلك يمكن إعطاء بعض النتائج البسيطة المتعلقة باحتمال حدث ما :

7-2 عمليات على الأحداث وقانون جمع الاحتمالات

Operation With Events And The Addition Laws Of Probability

فيما يلي بعض النظريات المهمة :

نظرية 2-1

إذا كان ϕ حدثاً مستحيلاً فان $P(\phi) = 0$.

البرهان

ليكن A و ϕ حدثين فان $A \cap \phi = \phi$

إذن A و ϕ حدثان منفصلان ولذلك فان $A \cup \phi = A$

إذن حسب البديهية الثالثة فان $P(A \cup \phi) = P(A)$ ومنها نحصل أن

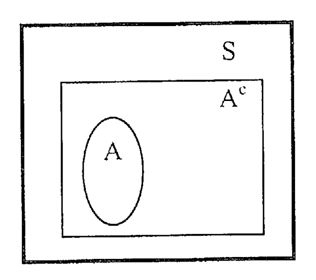
$$P(A) + P(\phi) = P(A)$$

إذن $P(\varphi) = P(A) - P(A) = 0$.

نظرية 2-2

إذا كان A حدثاً و A^{c} متممة الحدث فان $P(A^{c}) = 1 - P(A)$.

البرهان



بما أن $A \cap A^{c} = \phi$ لذلك فان الحدثين منفصلان.

إذن $A \cup A^{c} = S$ وبذلك يكون $P(A \cup A^{c}) = P(S)$

إذن وحسب البديهيتين الثانية والثالثة فان $P(A) + P(A^{c}) = 1$ ومنه نحصل على

$$P(A^{c}) = 1 - P(A)$$

ملاحظة:

سوف نرمز من الآن ولاحقاً إلى $A \cap B = AB$ لسهولة العمل والبرهان.

نظرية 2-3

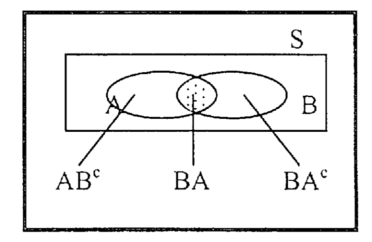
ليكن كل من الحدثين A, B حدثين غير منفصلين أي أن $AB \neq \phi$

فان: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

البرهان:

بما أن الحدثين $A \cap B \neq \phi$ فان الحدثين $(AB^{\circ}) \cap (AB) = \varphi$ لذلك فهما حدثان منفصلان ولهذا يكون $A = AB^{\circ} \cup AB$ وحسب البديهية الثالثة نحصل على العلاقة الآتية :

$$P(A) = P(AB^{\circ}) + P(AB) \quad \ldots\ldots(1)$$



كذلك فان الحدثين $(BA^{\circ}) \cap (AB) = \phi$ فهما حدثان منفصلان ولهذا يكون $B = BA^{\circ} \cup AB$ وحسب البديهية الثالثة نحصل على العلاقة التالية :

$$P(B) = P(BA^{\circ}) + P(AB) \quad \ldots\ldots(2)$$

وبنفس الأسلوب يكون $(AB^{\circ}) \cap (AB) \cap (BA^{\circ}) = \phi$ ولذلك فهم أحداث منفصلة وعلية وحسب البديهية الثالثة يكون $A \cup B = AB^{\circ} \cup AB \cup BA^{\circ}$ ومنها نحصل على العلاقة التالية:

$$P(A \cup B) = P(AB^{\circ}) + P(AB) + P(BA^{\circ}) \quad \ldots\ldots(3)$$

وبتعويض كل من $P(AB^{\circ})$ و $P(BA^{\circ})$ من العلاقتين 1 و2 في العلاقة 3 نحصل على العلاقة التالية :

$$P(A \cup B) = P(A) - P(AB) + P(AB) + P(B) - P(AB)$$

ومنه نحصل على :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ وهو المطلوب.

مثال 2-21

سحبت ورقة من مجموع أوراق اللعب ،فما هو احتمال أن الورقة تمثل عدداً أو أي مجموعة معينة من مجموعات أوراق اللعب الأربعة؟

الحل

نفرض إن A تمثل احتمال الحصول على عدد فان $P(A) = \frac{40}{52}$

واحتمال الحصول على ورقة من أي مجموعة من المجموعات الأربعة هو

B وبذلك فان $P(B) = \frac{13}{52}$. وعليه وبما إن $P(A \cap B) = \frac{10}{52}$ فان:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{40}{52} + \frac{13}{52} - \frac{10}{52} = \frac{43}{52}$$

نظرية 2-4

يمكن تعميم النظري السابقة وكما يلي:إذا كـان لـدينا $A_1, A_2, ..., A_n$ أحـداثاً غير منفصلة فان :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j}^{n} P(A_i \cap A_j) + ...(-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap ..... \cap A_n)$$

ويمكن البرهنة عليها باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي .

ملاحظة :

كحالة خاصة من النظرية السابقة فانه إذا كان كـل مـن A, B حـدثين منفـصلين يكون $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

مثال 2-22

رمي حجر نرد مرةً واحدة فما احتمال الحصول على عدد فردي؟

الحل

الحصول على عدد فردي معناه الحصول على 1 ، 3، 5،وهذه كلها أحداث منفصلة وبذلك فان :

$$P(1 \quad or \quad 3 \quad or \quad 5) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال 2-23

رمي حجر نرد مرتين فما احتمال الحصول على وجهين متشابهين؟

الحل

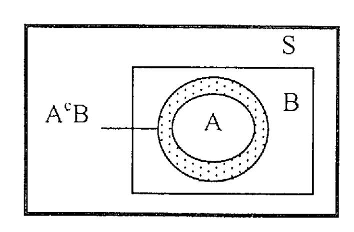
إن الأوجه المتشابهة هي: $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$ وكلها أحداثا منفصلة ،وعلية فان:

$$P(the \quad same \quad faces) = p(1,1) + ... + p(6,6) = \frac{1}{36} + ... + \frac{1}{36} = \frac{6}{36}$$

نظرية 2-5

إذا كان كل من A,B حدثين وكان $A \subseteq B$ فان $P(A) \le P(B)$.

البرهان:



بما أن $A \subseteq B$ فان $A \cap A^{c}B = \phi$ وهذا يعني أن A و $A^{c}B$ حدثين منفصلين

وبذلك فان $B = A \cup A^{c}B$

وبأخذ الاحتمالية للطرفين نحصل على :

$$P(B) = P(A \cup A^{\otimes}B)$$

وذلك حسب البديهية الثالثة فيكون $P(A) = P(A) + P(A^{c}B)$

ومنه ينتج أن: $P(B) - P(A) = P(A^{c}B) \ge 0$ حسب البديهية الأولى.

وبذلك نحصل على: $P(B) - P(A) \ge 0$ ومنه يكون $P(A) \le P(B)$.

نظرية 2-6

إذا كان $A \subseteq B$ فان $P(B) \leq P(A)$.

البرهان:

حسب النظرية السابقة حيث أن $P(A)-P(B) \geq 0$ فيكون $P(A) \geq P(B)$.

نظرية 2-7

إذا كان كل من A,B,C أحداثاً غير منفصلة فان:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-P(AB)$$
$$-P(AC)+P(ABC)$$

برهانها تمرين.

نظرية 2-8

ليكن كل من $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n \ldots\ldots$ سلسلة من الأحداث غير المنتهية بحيث أن $A_1 \subset A_2 \subset \ldots\ldots\ldots \subset A_n \subset \ldots\ldots$ فان:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

البرهان:

بما أن $A_1, A_2A_1^\circ, A_3A_2^\circ, \ldots\ldots, A_nA_{n-1}^\circ$ أحداثاً منفصلة لان تقاطعها مجموعة خالية فان :

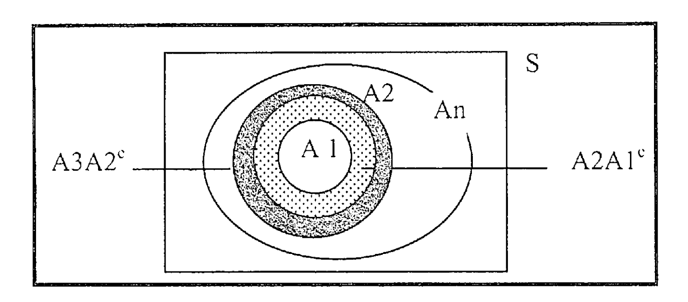
$$A_2 = A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_2A_1^\circ$$

$$A_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_2 \cup A_3A_2^\circ$$

.

.

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i A_{i-1}^\circ$$



وبأخذ الاحتمالية للطرفين ينتج أن :

$$P(A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i A_{i-1}^c)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i A_{i-1}^c)$$

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i A_{i-1}^c)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i A_{i-1}^c) \quad \text{.........(1)}$$

كذلك فان :

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1} A_i A_{i-1}^c$ وبأخذ الاحتمالية للطرفين وتطبيق البديهية الثالثة ينتج أن:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i A_{i-1}^c)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i A_{i-1}^c) \quad \text{.........(2)}$$

ومن العلاقة 1 و2 ينتج لنا أن: وبذلك $P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ يكون البرهان قد تم .

نظرية 9-2

إذا كانت كل من $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n \ldots\ldots$ سلسلة من الأحداث غير المنتهية بحيث أن:

$A_1 \supset A_2 \supset \ldots\ldots \supset A_n \supset \ldots\ldots$ فان : $P\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

البرهان:

حسب النظرية السابقة فان $A_1^\circ \subset A_2^\circ \subset A_3^\circ \subset ...... \subset A_n^\circ \subset ....$

وعليه يكون :

$$p\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^\circ\right] = \lim_{n\to\infty} P(A_n^\circ)$$

$$p\left[(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^\circ\right] = \lim_{n\to\infty} [1 - P(A_n)]$$

وذلك حسب قانون دي مورجان والنظرية (2) .

ومن ذلك ينتج أن :

$1 - p\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right]^\circ = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ ومنها ينتج أن :

$$p\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \lim_{n\to\infty} P(A_n) .$$

وهو المطلوب .

مثال 2-24

ألقيت قطعتين من النقود فإذا كان الحدث A يمثل ظهور صورة واحدة على الأقل والحدث B يمثل ظهور صورتين فقط بينما يمثل الحدث C ظهور كتابتين فقط ، اوجد ما يأتي :

1. هل أن الحدثين A,B منفصلان ؟
2. هل أن الحدثين C,A منفصلان ؟
3. احتمال ظهور A أو B ؟
4. احتمال ظهور B و C ؟

الحل

بما أن $S=\{HH,HT,TH,TT\}$ فان الحادث $A=\{HH,HT,TH\}$ والحادث $B=\{HH\}$ و $C=\{TT\}$ فان :

1. $A\cap B=\{HH\}\neq\phi$ فهما ليسا منفصلين .
2. $C\cap A=\phi$ فهما منفصلان .
3. إن احتمال ظهور A أو B يمثل احتمال ظهور الحادث $A\cup B$ أي أن :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

4. بما أن $B\cap C=\phi$ فان $P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

مثال 2-25

فصل دراسي يضم 20 طالبة و 30 طالباً،ومنهم 15 طالبة و 20 طالباً شعرهم أسود فإذا اُختير من الفصل شخصاً بطريقة عشوائية فما احتمال أن يكون الشخص المختار طالبة وشعرها اسود ؟

الحل

ليكن الحدث الذي يمثل الشخص المختار طالبة $=A$

ليكن الحدث الذي يمثل الشخص المختار شعره اسود هو$=B$

وعليه فان : $P(A)=\frac{20}{50}$ وان $P(B)=\frac{35}{50}$ و $P(A\cap B)=\frac{15}{50}$ أي أن A,B حدثين غير منفصلين وبذلك يكون :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{20}{50}+\frac{35}{50}-\frac{15}{50}=\frac{4}{5}$ وهو يمثل احتمالية أن يكون الشخص المختار هي طالبة شعرها اسود .

8-2 العينات العشوائية Random Sampling

نفرض أن لدينا مجتمعاً (population) يتكـون مـن n مـن العناصـر ونريـد أن نختار منه عينـة مـن r مـن العناصـر($r \leq n$) ، أن العينـات المختـارة تـسمى عينـات عشوائية (random samples) وهناك نوعان من العينات العشوائية:

1. العينات غير المرتبة (Unordered Sample)

نختار r من العناصر من n من العناصـر في وقـت واحـد ونـستخدم التوافيـق لحساب عدد العينات العشوائية.

2. العينات المرتبة (Ordered Sample)

وتقسم إلى قسمين حسب طريقة الاختيار:

- إذا كان الاختيار يتم واحداً بعد الآخر وبدون إرجـاع(one by one with out replacement) فإننا نختار r من العناصر من n مـن العناصـر وذلـك حسب قانون التباديل.
- إذا كان الاختيـار يـتم واحـداً بعـد الآخـر مـع الإرجـاع (one by one with replacement) فإننا نختار r من العناصر من n وذلك حسب العلاقة n^r .

9-2 الاحتمال الشرطي والاستقلال

Conditional Probability and independence

1-9-2 الاحتمال الشرطي Conditional Probability

نقدّم فكرة مهمة جـداً وهـو الاحتمـال الـشرطي(Conditional) Probability الذي يستخدم لبيان كيفية احتمالية حدث ما يجب أن يعتمد علـى معلومـات إضـافية نحصل عليها .[2].

إن الاحتمال الشرطي لأي حدث A عندما يكون الحدث B معروفاً أو معطى حيث نسمي (A/B) حدثاً شرطياً ،

نعبر عنه كالآتي:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال 2-26

رمي حجر نرد مرتين وسجلت الحادثة $(X_1\,,X_2)$ ، عندما X_1 يمثل الناتج لكل $i=1,2$ وليكن A يمثل الحدث بحيث أن $X_1+X_2=10$ و B يمثل الحدث الذي فيه $X_1>X_2$ اوجد $P(A)$ و $P(B)$ ثم اوجد الاحتمال الشرطي $P(A/B)$ و $P(B/A)$ ؟

الحل

فضاء العينة $S=36$

$$A=\{(x_1,x_2):x_1+x_2=10\}=\{(6,4),(5,5),(4,6)\}$$

$$B=\{(x_1,x_2):x_1>x_2\}=\{(2,1),(3,1)....(5,4),(6,4),(6,5)\}$$

$$\therefore\quad P(A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\quad ,and\quad P(B)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

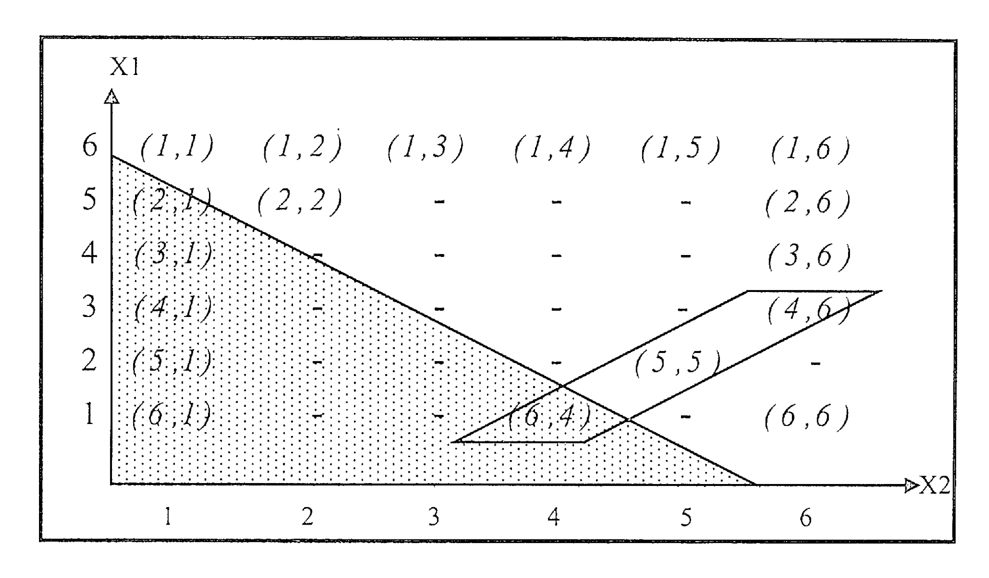
وعليه إذا كان الحدث B معطى أو حاصل فان:

$(A\cap B)=\{(6,4)\}\rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{36}=P(B\cap A)$ وبذلك نحصل على :

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{12}}=\frac{1}{36}\times\frac{12}{5}=\frac{1}{15}$$

بنفس الأسلوب نحسب:

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{12}}=\frac{1}{36}\times\frac{12}{1}=\frac{1}{3}$$



وعليه يمكن أن نضع تعريف الاحتمال الشرطي بالشكل الأتي:

تعريف 2-2

ليكن S فضاء عينة لتجربة عشوائية معينه ،وليكن A و B حدثين في S.

فان الاحتمال الشرطي للحدث A عندما B معطى هو:

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ حيث أن $P(B) > 0$.

2-9-2 قانون الضرب Multiplication Law

وكنتيجة مباشرة من تعريف الاحتمال الشرطي نحصل على قانون الضرب لأي حدثين A و B وكما يأتي:

1. $P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$
2. $P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$

ويمكن بسهولة تامة أن نُعمم هذا القانون إلى ثلاث أحداث وكالاتي:

نفرض لدينا الأحداث A_1 ، A_2 و A_3 ولتكن $P(A_3/A_1 \cap A_2)$ تمثل الاحتمال الشرطي للحدث A_3 عندما يعطى الحدثين A_1 و A_2 .سوف نتعامل مع

$(A_1 \cap A_2)$ كحدث مفرد ونفرض بان $P(A_1 \cap A_2) \neq 0$ فانه حسب التعريف السابق يكون:

$$P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_3 \cap (A_1 \cap A_2))}{P(A_1 \cap A_2)} \quad \text{.........................(2-1)}$$

ولكن: $A_3 \cap (A_1 \cap A_2) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$

وان: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1)$

وبالتعويض في العلاقة $(2-1)$ نحصل على

أي أن: $P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1)P(A_2/A_1)}.$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

ومنها نستطيع أن نعطي قانون الضرب إلى r من الأحداث المتصلة وكما يأتي:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_r)$$
$$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)\ldots.P(A_r/A_1 \cap A_2\ldots\ldots \cap A_{r-1})$$

ملاحظة:

برهان قانون الضرب بسيط وذلك بالتعويض بالطرف الأيسر عن جميع قيم الاحتمال الشرطي وبإجراء سلسلة من الاختصارات نحصل على القانون.

مثال 2-27

ليكن لدينا علبة من ورق اللعب تحتوي على أربعة أنواع من أشكال الورق وكل نوع يتكون من 13 ورقة . اختيرت 4 أوراق عشوائياً ، اوجد احتمالية الحصول على 4 أوراق من نفس النوع؟

الحل

نفرض أن الأوراق الأربعة هي من نوع القلب،ونفرض إن A_i تمثل الحدث من نوع القلب في i من الاختيارات $(i = 1, 2, 3, 4)$ فنحصل على :

$P(A_1) = \frac{13}{52}$ و $P(A_2/A_1) = \frac{12}{51}$ و $P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{11}{50}$

$$P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{10}{49}$$

وعليه فان $P(4 \quad clubs \quad selected) = \left(\frac{13}{52}\right)\left(\frac{12}{51}\right)\left(\frac{11}{50}\right)\left(\frac{10}{49}\right) = \frac{11}{4165}$

وبنفس الأسلوب ممكن أن نحصل على نفس الاحتمال في حالة اختيار الاربعة أوراق من كل نوع من الأنواع الأخرى الثلاثة وبذلك يكون:

$$P(4 \quad cardsofthesamesuit) = 4 \quad \left(\frac{11}{4165}\right) = \frac{44}{4165}$$

مثال 2-28

شحنة من المكائن حجمها 20 ماكنة تحتوي على 4 مكائن غير صالحة ، اختيرت منها 3 مكائن من دون إعادة ، فما هو احتمال على الأقل ماكينة واحدة غير صالحة ؟

الحل

نفرض إن B تمثل الحدث الذي يحوي على الأقل ماكينة واحدة غير صالحة، وبما أن عدد المكائن الصالحة هو 16 فان مكملة الحدث B تمثل جميع المكائن الصالحة وعليه، إذا كان A_i يمثل الحدث الذي نختاره من الشحنة ويكون صالحاً وان $i = 1, 2, 3, 4$ فان:

$$P(B^\circ) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_2 \cap A_1)$$
$$= \left(\frac{16}{20}\right)\left(\frac{15}{19}\right)\left(\frac{14}{18}\right) = \frac{28}{57}$$

وعليه فان:

$$P(B) = 1 - P(B^\circ) = 1 - \frac{28}{57} = \frac{57 - 28}{57} = \frac{29}{57}$$

مثال 2-29

سُحبت ورقتان من مجموعة أوراق اللعب من دون إعادة فما احتمال أن تكون عشرتين ؟

الحل

ليكن A يمثل الحصول على العدد 10 في الورقة الأولى.

و B يمثل الحصول على العدد 10 في الورقة الثانية.

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{52}\frac{3}{51} = \frac{12}{(52)(51)}$$

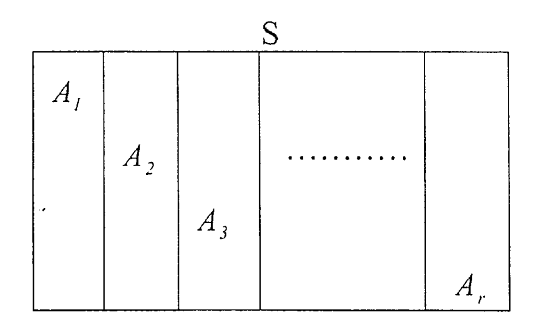
3-9-2 نظرية الاحتمال الكلي The Total Probability Theorem

استخدمنا مفهوم الاحتمال الشرطي لتحديد احتمالية الحدوث المشترك لبعض الأحداث من خلال قانون الضرب للاحتمال.

وفي بعض التطبيقات المهمة ، فان الاحتمال الشرطي يكون مفيداً في تحديد الاحتمالية للحدث الوحيد.ولذلك سنحتاج التعريف الآتي:[5]

تعريف 2-3

الأحداث $A_1, A_2, A_3 ....., A_r$ تمثل تجزئة (partition) لفضاء العينة S إذا كان $A_i \cap A_j = \phi$, $A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_r = S$ لكل i و j وان $P(A_i) > 0$ لكل $i = 1, 2, 3, ..., r$. وكما يظهر بالرسم



مثال 2-30

رمي حجر نرد مرة واحدة بحيث كانت $B_1 = \{1,2,3\}$ و $B_2 = \{4,5\}$ و $B_3 = \{6\}$

نلاحظ بان B_1, B_2, B_3 تمثل تجزئة إلى فضاء العينة ولكن $C_1 = \{1, 2, 3, 4\}, C_2 = \{3, 5, 6\}, C_3 = \{2, 4, 5\}$ لا تمثل تجزئة إلى فضاء العينة لان تقاطعها لا يساوي ϕ .

نظرية 2-10

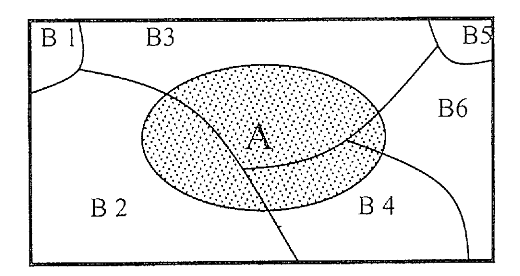
ليكن $A \neq \phi$ حدثا من فضاء ألعينه S و $B_1, B_2 \quad ,....., B_r$ هي تجزئة لفضاء ألعينه فان:

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + ... + P(A/B_r)P(B_r)$$

البرهان:

نلاحظ أن $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) ..... \cup (A \cap B_r)$

وبعض هذه المجموعات ربما تكون خالية والشكل أدناه يوضح ذلك:



وعلية يمكن تطبيق قانون جمع الاحتمالات كالآتي:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_r) = \sum_{i=1}^{r} P(A \cap B_i)$$

وبما أن $P(A \cap B_i) = P(B_i)P(A/B_i)$

فنحصل على:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{r} P(B_i)P(A/B_i)$$

مثال 2-31

شركة تستلم مواد معينه من (3) مجهزون وكان إنتاجها هو(5و3و2) .وقد أشارت السجلات القديمة إلى أن نسبة المواد العاطلة من المجهزين الثلاثة هي 2٪ و3٪

و4٪ على التوالي.إن جميع المواد المجهزة للشركة تخزن في مخزن مركزي ،إذا اختيرت (2) مادة عشوائياً من المخزن فما هي احتمالية أن تكون كلا المادتين عاطلة؟

الحل

نفرض أن

A_j : يمثل j من المواد المسحوبة من المخزن وتكون عاطلة حيث أن : $j = 1,2$.

B_i : يمثل المادة المسحوبة من المجهز و أن $i = 1,2,3$. وعليه وبما أن عدد المواد المجهزة هو 10 مواد فان:

$$P(B_3) = \frac{2}{10} \text{ و } P(B_2) = \frac{3}{10} \text{ و } P(B_1) = \frac{5}{10}$$

وبما أن نسبة المواد العاطلة من المجهزين الثلاثة هي:

$$P(A_1/B_1) = P(A_2/B_1) = 0.02$$

$$P(A_1/B_2) = P(A_2/B_2) = 0.03$$

$$P(A_1/B_3) = P(A_2/B_3) = 0.04$$

$$P(A_1) = P(B_1)P(A_1/B_1) + P(B_2)P(A_1/B_2) + P(B_3)P(A_1/B_3)$$

$$= (0.50)(0.02) + (0.30)(0.03) + (0.20)(0.04) = 0.027$$

وبنفس الأسلوب نحسب $P(A_2) = 0.027$ وعليه فان احتمالية أن تكون كلا المادتين عاطلة هو:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = (0.027)(0.027) = 0.000729$$

4-9-2 الأحداث المستقلة Independents Events

ليكن لدينا الحدثان A و B .ففي بعض الحالات يمكن أن نضع الاحتمال الشرطي $P(A/B)$ بأسلوب لا يكون فيه شرطياً وبذلك تصبح المعلومات التي تمثل الحدث B ليس ذات تأثير على تقدير احتمالية الحدث A .

تعريف 2-4

نقـــول أن الحــــدثين A و B حــــدثان مــــستقلان إذا وإذا فقـــط كــــان $P(A)P(B) = P(AB)$ ويكــون الحــدثان A و B غــير مــستقلين إذا وإذا فقــط كان $P(A)P(B) \neq P(AB)$.

تعريف 2-5

يمكن وضع التعريف السابق بالشكل الآتي:

$P(A/B) = P(A)$ وكذلك $P(B/A) = P(B)$.

نظرية 2-11

إذا كان A و B أحداث مستقلة بحيث أن $A \neq \phi$ و $B \neq \phi$ فأن A و B أحداثا متصلة .

البرهان

بما أن A و B أحداثا مستقلة فان $P(A)P(B) = P(AB)$ وبما أن:

$A \neq \phi \Rightarrow P(A) \neq 0$

$B \neq \phi \Rightarrow P(B) \neq 0$ وعليه يكون $P(A)P(B) \neq 0$ وبذلك نحصل على أن

$P(AB) \neq 0 \Rightarrow A \cap B \neq \phi$.

ملاحظة:

عكس المبرهنة أعلاه غير صحيح (يوجد مثال على أحـداثا متـصلة ولكنهـا غـير مستقلة).

مثال 2-32

اختار(2) عدد صحيح مـن (4) أعـداد صـحيحة واحـد بعـد الآخـر ومـن دون إرجاع بحيث أن الحدث A يمثل أول اختيار يكون العدد 2 والحدث B يمثل ثـاني اختيار العدد 1، هل أن الحدثين مستقلان أم لا ولماذا؟

الحل

بما أن $S = P_2^4 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$ وبما أن:

$$A = \{(2,1),(2,3),(2,4)\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(2,1),(3,1),(4,1)\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$A \cap B = \{(2,1)\} \Rightarrow P(AB) = \frac{1}{12}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{14} \neq P(AB)$$

وعليه نستنتج بان الحدثين غير مستقلين بالرغم من أنهما حدثان متصلان وعليه يكون عكس النظرية أعلاه غير صحيح .

نظرية 2-12

إذا كان A و B حدثين منفصلين(Disjoint) بحيث أن $A \neq \phi$ و $B \neq \phi$ فان الحدثين غير مستقلين(Dependent) .

البرهان

بما إن الحدثين منفصلان فان

$AB = \varphi \Rightarrow P(AB) = 0$ وبما أن $A \neq \varphi \Rightarrow P(A) \neq 0$

و $B \neq \varphi \Rightarrow P(B) \neq 0$ ومن ذلك نستنتج بأن

$$P(A)P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A)P(B) \neq P(AB)$$

إذن A و B حدثان غير مستقلين .

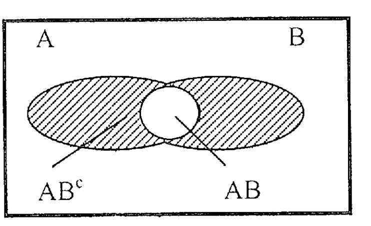
نظرية 2-13

إذا كان A و B حدثين مستقلين فان :

1. A و B° مستقلان.
2. B و A° مستقلان.

3. A° و B° مستقلان.

البرهان



لبرهان الفقرة (1) فانه بما أن $A = AB^{\circ} \cup AB$

فان: $P(A) = P(AB^{\circ}) + P(AB)$

حسب البديهية الثالثة فأن:

$$\begin{aligned} P(AB^{\circ}) &= P(A) - P(AB) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] \\ &= P(A)P(B^{\circ}) \end{aligned}$$

برهن الفقرات (2) و(3).

مثال 2-33

رمي حجر نرد مرتين وكان الحدث A : يمثل الرمية الأولى تكون 1 أو 2 ، والحدث B : يمثل الرمية الثانية تكون الأعداد الفردية . بين فيما اذا كان الحدثان مستقلين أم لا؟

الحل

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$$
$$B = \{(1,1),(1,3),(1,5).(2,1),(2,3),(2,5),$$
$$(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5),$$
$$(5,1),(5,3),(5,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}$$
$$A \cap B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5)\}$$

بما إن فضاء العينة=36 فان: $P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ وبما إن

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

فان: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(1/6)}{(1/2)} = \frac{1}{3} = P(A)$ وكذلك فان

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{(1/6)}{(1/3)} = \frac{1}{2} = P(B)$$

ومن خلال العلاقتين أعلاه يتضح بان الحدثين A و B مستقلان .

ملاحظة:

في بعض التطبيقات نفترض أن الأحداث مستقلة وعليه نستطيع تحديد احتمالية التقاطع لهما أي أن $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ، وهذا الافتراض نعمل به عندما تكون الشروط المقترحة للتجربة معقولة . ومثال على ذلك إذا كان لدينا نظام مكوناته تعمل بشكل متتابع فان كلا المكونتين يجب أن تعمل وان كل مكونه منه تختبر بشكل منفرد ، واحتمالية عدم عملهما هي p_1 و p_2 على التوالي . فإذا كانت A و B حدثين للمكونتين 1 و2 على التوالي فان احتمالية النظام يعمل = $P(A \cap B)$ أي انه لايمكن أن نحصل على إنتاج مالم نفترض بان المكونات تعمل بشكل مستقل وإذا كانت هذه الفرضية معقولة فان:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (1-P_1)(1-P_2)$$

والآن سوف نوسع فكرة الاستقلالية (Independent) لأكثر من حدثين، حيث سنوسع المفهوم إلى ثلاثة أحداث أولاً، والمثال الآتي يوضح ذلك:

مثال 2-34

في دراسة طبية أُعطي عدد من المرضى علاج مشترك لمرض كلوي ، حيث صنف المرضى حسب أعمارهم وجنسهم منذ بداية المعالجة وقد كانت نسب بقاء المرضى على قيد الحياة بعد سنتين من العلاج كما في الجدول الآتي:

	باقي على قيد الحياة		متوفون	
	ذكر	انثى	ذكر	أنثى
تحت الأربعين	0.05	0.25	0.10	0.10
فوق الأربعين	0.13	0.17	0.02	0.18

نفرض أن المريض يتم اختياره عشوائياً في البداية .

لتكن الأحداث A ، B و C تمثل المرضى الباقين على قيد الحياة ، المرضى من الذكور، والمرضى الذين أعمارهم تحت الأربعين على التوالي.وعليه فان:

$$P(A)=0.05+0.25+0.13+0.17=0.60$$

$$P(B)=0.05+0.13+0.10+0.02=0.30$$

$$P(C)=0.05+0.25+0.10+0.10=0.50$$

وإذا وضعنا الجداول الآتية مصنفة حسب عملية البقاء والموت لكلا الجنسين ، ثم لكلا العمرين ، ثم جُدولِ الجنسين حسب أعمارهما فنحصل على:

	بقاء	موت
تحت الأربعين	0.30	0.20
فوق الأربعين	0.30	0.20

	بقاء	موت
ذكر	0.18	0.12
أنثى	0.42	0.28

	ذكر	انثى
تحت الأربعين	0.15	0.35
فوق الأربعين	0.15	0.35

وعلية نحصل على :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=(0.60)(0.30)=0.18$$

وهي ذات القيمة التي تظهر في الجدول الثاني تحت عنوان المرضى الباقين حسب جنسهم. وبنفس الأسلوب نحسب :

$$P(A\cap C)=P(A)P(C)=(0.60)(0.50)=0.30$$

و

$$P(B\cap C)=P(B)P(C)=(0.30)(0.50)=0.15$$

كذلك فان :

$$P(A\cap B\cap C)=(0.60)(0.30)(0.50)=0.09$$

وهذه القيمة تمثل احتمالية الأحداث المستقلة إذا أُخذت معاً.

تعريف 2-6

نقول إن الأحداث A ، B و C مستقلة إذا وإذا فقط كان :

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
2. $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
3. $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

وعليه يمكن تعميم التعريف السابق إلى ما يأتي:

تعريف 2-7

نقول إن $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ أحداث مستقلة إذا وإذا فقط كان لكل $r = 1,2,3\ldots,n$
$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots\ldots \cap A_{i_r}) = P(A_{i1})P(A_{i2})\ldots..P(A_{ir})$ عندما $i_1, i_2, \ldots., i_r$ تمثل اختيار r من الأعداد الصحيحة من n .

2-9-5 نظرية بيز Bayes Theorem

تهدف نظرية بيز إلى حساب احتمالات صحة الفروض بناءاً على معلومات ميدانية أو تجريبية. ونظرية بيز تجيب على أسئلة من نوع ما احتمال أن تكون مفردة معينة معيبة قد سُحبت بشكل عشوائي من احد الصندوقين اللذين يحويان مفردات سليمة وأخرى معيبة، وهي تعتبر تطبيقاً للاحتمال الشرطي.[2]

من قانون الاحتمال الكلي نلاحظ بان احتمالية الحدث A هي:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{r} P(B_i)P(A/B_i)$$

إذا أعطي $A \neq \phi$ فان واحداً من الأحداث $B_1, B_2, \ldots.B_r$ الغير خالية التي تمثل تجزئة لفضاء العينة S تحصل ويمكن تحديد الاحتمالات الشرطية لها وهي $P(B_i/A)$ حيث إن $i = 1, 2, \ldots, r$ ، من تعريف الاحتمال الشرطي نحصل على:

$$P(B_i/A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}$$

وعليه نحصل على:

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{r}P(B_i)P(A/B_i)}$$ حيث أن $i=1,2,....,r$.

وبذلك نكون قد برهنا على نظرية بيز.

ملاحظة:

يسمى الاحتمال $P(B_i)$ بالاحتمال المسبق أو القبلي (prior probability) وهو الاحتمال الذي نحصل عليه من خلال الاخبار الشخصية،فمثلاً الاحتمالات المعتمدة على سجلات المبيعات. بينما يسمى الاحتمال $P(B_i/A)$ بالاحتمال الخلفي أو ألبعدي (posterior probability)وهو الاحتمال الذي نحصل علية من خلال معلومات ميدانية .

مثال 2-35

في احد المصانع التي تصنع مصابيح إضاءة كهربائية ،فان الماكينات A_1 و A_2 و A_3 تصنع على الترتيب 0.30و 0.30و 0.40 من مجموع الإنتاج وإذا كان 0.01و 0.03و 0.02 من إنتاج الماكينات الثلاث على الترتيب هو انتاج معيب. سُحب مصباح عشوائياً من إنتاج احد الأيام ووجِد بأنه معيب ،فما احتمال أن يكون هذا المصباح من صنع الماكينة A_1؟من صنع الماكينة A_2؟من صنع الماكينة A_3؟

الحل

ليكن D يمثل المصباح المعيب وان احتماليته هي : $P(D)$

ونمثل الاحتمالات التالية :

$P(A_1)$:يمثل احتمال أن يكون المصباح من صنع A_1

$P(A_2)$:يمثل احتمال أن يكون المصباح من صنع A_2

$P(A_3)$:يمثل احتمال أن يكون المصباح من صنع A_3

وعليه فان احتمالية أن يكون المصباح مصنعاً من A_1 ومعيباً هو:

$P(A_1)=0.3 \quad P(D/A_1)=0.01$

وكذلك فان احتمالية أن يكون المصباح مصنعاً من A_2 ومعيباً هو:

$$P(A_2) = 0.3 \quad P(D / A_2) = 0.03$$

واحتمالية أن يكون المصباح مصنعاً من A_3 ومعيباً هو:

$$P(A_3) = 0.4 \quad P(D / A_3) = 0.02$$

والآن دعنا نحسب الاحتمالات الآتية:

$$P(A_1D) = P(A_1)P(D / A_1) = (0.3)(0.01) = 0.003$$

$$P(A_2D) = P(A_2)P(D / A_2) = (0.3)(0.03) = 0.009$$

$$P(A_3D) = P(A_3)P(D / A_3) = (0.4)(0.02) = 0.008$$

وباستخدام نظرية بيز نحصل على احتمالات المصابيح المعيبة من كل ماكنه:

$$P(A_1 / D) = \frac{P(A_1D)}{P(A_1D) + P(A_2D) + P(A_3D)}$$

$$= \frac{0.003}{0.003 + 0.009 + 0.008} = \frac{3}{20}$$

$$P(A_2 / D) = \frac{P(A_2D)}{P(A_1D) + P(A_2D) + P(A_3D)}$$

$$= \frac{0.009}{0.003 + 0.009 + 0.008} = \frac{9}{20}$$

$$P(A_3 / D) = \frac{P(A_3D)}{P(A_1D) + P(A_2D) + P(A_3D)}$$

$$= \frac{0.008}{0.003 + 0.009 + 0.008} = \frac{8}{20}$$

تمارين الفصل الثاني

1. صندوق يحتوي على (24) مصباح منها (4) مصابيح عاطلة . تم اختيار (4) مصابيح ، اوجد احتمالية المصابيح العاطلة ؟

2. مجموعة تتكون من (12) ترانزستور منها (3) عاطلة ، اختيرت عينة من (4) ترانزستورات، اوجد احتمالية :

أ. احتمالية اثنين من ترانزستورات عاطلة.

ب.احتمالية على الأقل واحد منهم عاطل.

3. كيس به عدد من الكرات السوداء ستة أضعاف الكرات الحمراء سحبت من الكيس كرة عشوائيا ، احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء؟

4. احد أمراض الدم تصيب المجتمع بشكل قوي بنسبة 1٪ وبشكل اخف بنسبه 5٪ والنسبة الباقية بدون إصابة ، تم اكتشاف تحليل مختبري وجرب ، فسجل نجاح 90٪ على المصابين من الحالة الأولى و 70٪ على الحالة الثانية ،وكانت نسبه الخطأ في الاختبار هي 10٪. وتم اختيار شخص عشوائياً ويجرى له الاختيار ماهي احتمالية أن الشخص يحمل المرض

أ. بشكل قوي.

ب.بشكل خفيف.

ج. لا يحمل المرض.

5. لتكن التجربة العشوائية هي اختيار عائلة لها 3 أطفال وتسجيل هؤلاء الأطفال حسب الجنس وتسلسل الولادة.أحسب احتمال أن يكون للعائلة ولدان.

6. سحبت ورقتان من مجموعة أوراق اللعب (52) بحيث تعاد الورقة الأولى قبل سحب الثانية .احسب الاحتمالات الآتية:

a) أن تكون الورقتان المسحوبتان من اللون الأسود؟

b) أن تكون الورقتان المسحوبتان من شكل ديناري؟

c) أن تكون الورقتان المسحوبتان من نفس الشكل؟

7. إذا كان لدينا ثلاثة أزواج من الأشخاص المتزوجين.واخترنا من كل زوج فرداً واحداً بدون تحيز فما هو احتمال:

8. أن يكون الأفراد المختارون من جنس واحد؟ أن يكونوا رجلين وامرأة ؟

9. رميت قطعة نقود خمس مرات ،ماهي النتائج الممكنة ،احسب احتمال كل منها؟

10. ما هو احتمال ظهور ثلاثة صور في رمية واحدة لثلاثة قطع من النقود ؟

11. رمى شخص قطعة نقود فإذا حصل على صورة وضع ثلاث كرات سوداء في الصندوق ،أما إذا حصل على كتابة فانه يضع كرتين سوداء وكرة بيضاء.فإذا كرر الشخص التجربة n من المرات ثم سحب كرة من الصندوق.احسب احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء ؟

12. كيس به *100* كرة متماثلة فيما عدا اللون منها *45* كرة بيضاء و *30* كرة حمراء و25 كرة سوداء ،سحبت كرة وسجل لونها وأُعيدت إلى الكيس ثم سحبت كرة ثانية وسجل لونها وأُعيدت إلى الكيس ثم سحبت كرة ثالثة ،ماهو احتمال أن تكون ألوان الكرات الثلاثة المسحوبة على الترتيب ،ابيض،اسود،واحمر ؟

13. رميت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فما هو احتمال ألا تحدث صورتان متتاليتان في الرميات الثلاثة؟ ما هو احتمال ألا تحدث صورتان أو كتابتان في الرميات الثلاثة ؟

14. إذا كان احتمال أن يتأخر احمد عن عمله $\frac{2}{3}$ ،إذا ذهب إلى العمل ماشياً و $\frac{1}{4}$ إذا ذهب بالحافلة و $\frac{1}{6}$ إذا ذهب بسيارته .فما احتمال أن يتأخر عن عمله في احد الأيام إذا اختار وسيلته بطريقة عشوائية ؟

15. إذا كان لدينا صندوقان الأول يحتوي على *5* مناديل معيبة و *8* مناديل سليمة والثاني يحتوي على *6* مناديل معيبة و *11* سليمة .فما احتمال أن يكون المنديل المسحوب عشوائياً من احد الصندوقين معيباً ؟

16. لتكن التجربة هي اختيار عائلة لديها أربعة أطفال وتسجيلهم حسب الجنس وتسلسل الولادة . ما فضاء الاحتمال لهذه التجربة ثم احسب ما يأتي:

احتمال عند العائلة بنت واحدة ؟

احتمال عند العائلة أكثر من بنتين ؟

احتمال عند العائلة 3 بنات على الأكثر ؟

17. إذا سحبنا 5 ورقات من مجموعة أوراق اللعب (52) بدون إعادة ،فما هو احتمال احتواء هذه الأوراق على ورقة واحدة بها صورة شايب ؟

18. ماكنتان الأولى تنتج 0.60 من إنتاج مصنع البطاريات الجافة والثانية تنتج ما تبقى من الإنتاج.فإذا كان 0.05 من إنتاج الأولى معيب و 0.02 من إنتاج الثانية معيب .فما هو احتمال أن تكون بطارية معيبة مصنعة من الماكينة الأولى ؟

19. كيس يحتوي على 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء،سُحبت منه 3 كرات بدون إعادة ،فما احتمال أن تكون جميع الكرات بيضاء؟

20. إذا كان 40٪ من المدخنين يفضلون نوع السكاير A والباقون يفضلون نوع السكاير B وكانت النساء تمثل 30٪ من بين الذين يفضلون A و 40٪ من بين الذين يفضلون B ، فإذ اخترنا من بينهم امرأة فما هو احتمال أن تكون من بين الذين يفضلون النوع A؟

الفصل الثالث

المتغيرات العشوائية المتقطعة والتوزيعات الاحتمالية

3-1 مقدمة

3-2 المتغير العشوائي

3-3 المتغيرات العشوائية المتقطعة

3-4 التوقع الرياضي وخواصه

3-5 العزوم للمتغير العشوائي المتقطع

3-6 الدالة المولدة للعزم

3-7 التحويل في المتغيرات العشوائية المتقطعة

تمارين الفصل الثالث



الفصل الثالث

المتغيرات العشوائية المتقطعة والتوزيعات الاحتمالية

RANDOM VARIABLES AND DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

3-1 مقدمة Introduction

لاحظنا في الفصل السابق، أن النتائج التي نحصل عليها من خلال التجارب العشوائية أما أن تكون رقمية كما هو الحال في رمي حجر النرد أو تكون نوعية، كما هو في حالة رمي قطعة النقود أو ورق اللعب وغيرها ،وان هذه النتائج تدعى بالمتغيرات العشوائية التي تعبر عن كل تجربة ، وعليه فان المتغير العشوائي يتم فيه الحصول على قيمةٍ من خلال التجربة العشوائية.

محتوى هذا الفصل، دراسة المتغيرات العشوائية، من حيث تعريفها، وأنواعها، والتوزيعات الاحتمالية لها، وخصائص هذه التوزيعات.

3-2 المتغير العشوائي Random Variable

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيماً حقيقيةً مختلفة تُعبر عن نتائج فضاء العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين،وبعبارةٍ أخرى فان المتغير العشوائي يمثل دالة تنقل جميع قيم فضاء العينة إلى قيم حقيقية ضمن الفضاء R_x والذي هو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.[3]

وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1. المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Random Variables .
2. المتغيرات العشوائية المتصلة(المستمرة) Continuous Random Variables.

3-3 المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Random Variables

المتغير العشوائي المتقطع هو الذي يأخذ قيم بينية، ومتباعدة، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة....$X, Y, Z,$ ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالحروف الأبجدية الصغيرة، ... $x, y, z,$، ومن أمثلة هذه المتغيرات:

a) عدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولاد X، $X:\{x=0,1,2,3,4\}$.

b) عدد العملاء الذين يتم انجاز خدمتهم البنكية كل **10** دقائق Y، $Y:\{y=0,1,2,3,....\}$.

c) عدد مرات استخدام نوع معين من الأسمدة خلال الدورة الزراعية.

d) عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج *200* وحدة كل موسم.

e) عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

وهكذا تكون الأمثلة كثيرة على هذا النوع من المتغيرات.

3-3-1 التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يُبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فضاء العينة، وبمعنى آخر هو التكرار النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.

فإذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يأخذ القيم، $X:\{x=x_1,x_2,...,x_n\}$، وكان $P(X=x_i)=f(x_i)$ هو احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمة x_i، فإنه، يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، وهو جدول مكون من عمودين، الأول به القيم الممكنة للمتغير $X:\{x=x_1,x_2,...,x_n\}$، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير $P(X=x_i)=f(x_i)$، أي أن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع يكون بالشكل الآتي:

x_i	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
⋮	⋮
x_x	$f(x_x)$
$\sum$	1

مثال 3-1

أذا رمينا حجر النرد مرةً واحدة فإنه يمكن لنا أن نمثل النتائج الممكنة واحتمالات كل منها بالجدول الأتي:

الوجه	1	2	3	4	5	6
الاحتمال	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

أما إذا رمينا حجري نرد ووضعنا اهتمامنا على مجموع الوجهين فإننا نحصل على الجدول الأتي:

مجموع الوجهين	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاحتمال	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

هذان الجدولان يمثلان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع.

3-3-2 دالة الكتلة الاحتمالية: Probability Mass Function

إذا كان X يمثل متغيراً عشوائياً متقطعاً يأخذ القيم $x_1, x_2, ..., x_n$ باحتمال $f(x_i)$ حيث أن $i = 1, 2, ..., n$ فإن الدالة $f(x_i)$ تسمى دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع X، ومن خصائص هذه الدالة إنها تحقق الشروط التالية:

a) $f(x) \geq 0$ لكل $x \in X$.

b) $\sum_{\forall x \in X}^{n} f(x_i) = 1$.

c) $P(X \in A) = \sum_{x \in A} f(x)$ حيث إن A هي مجموعة جزئية من الفضاء R_x.

مثال 3-2

إذا كان X يمثل متغيراً عشوائياً متقطعاً، يمثل الحصول على وجة الكتابة H عند رمي قطعة النقود مرتين ،كوّن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X ؟ وارسم الدالة؟

الحل

بما أن فضاء العينة هو $S = \{TT, TH, HT, HH\}$ فان:

المتغير العشوائي يأخذ القيم الآتية:

$X = 0, 1, 2$ وعليه يكون $f(x) = p(X = x)$ ومنه نحصل على:

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

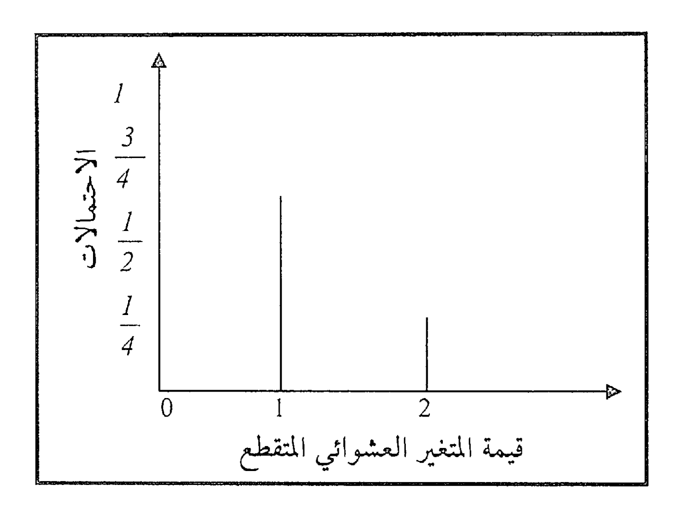
$$f(1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

وبذلك يمكن أن نضع جدولاً لدالة الكتلة الاحتمالية مع المتغير العشوائي الخاص بها:

$X = x$	0	1	2
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالرسم كما يأتي:



مثال 3-3

لتكن الدالة

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{10} & ,x=0,1,2,3,4\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

أثبت أنها دالة كتلة احتمالية؟

الحل

حتى نثبت بان $f(x)$ هي دالة كتلة احتمالية يجب أن تحقق الشروط الاتيـة:

الشرط الأول

$f(0)=0, f(1)=\frac{1}{10}, f(2)=\frac{2}{10}, f(3)=\frac{3}{10}, f(4)=\frac{4}{10}$ أي أن:

$$f(x)\geq 0 \quad ,\forall x \in X$$

أما الشرط الثاني فان:

$$\sum_{x=0}^{4} f(x)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$$

$$=0+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{10}{10}=1$$

إذن الشرطان متحققان وعليه فأن $f(x)$ دالة كتلة احتمالية.

مثال 3-4

لتكن

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{k} & ,x=0,1,2,3,4\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

دالة كتلة احتمالية للمتغير العشوائي X،أوجد قيمة k ؟ثم ارسم الدالة؟

الحل

من الشرط الثاني فان :

$\sum_{x=1}^{5} f(x)=1$ وعليه فان:

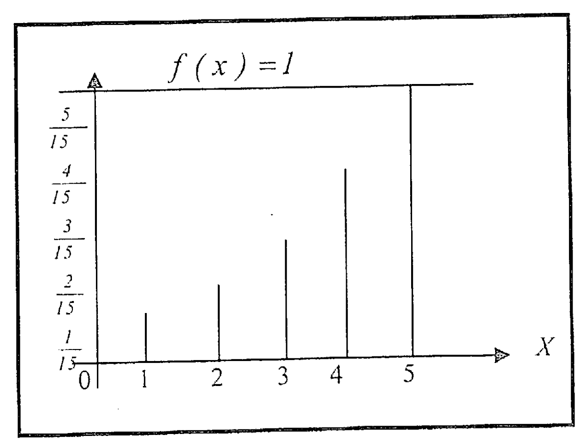
$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=1$$

$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}+\frac{5}{k}=1$ ومنه فان $\frac{15}{k}=1$

إذن $k=15$. وبذلك تصبح الدالة كما يأتي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{15} & ,x=0,1,2,3,4\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

ولرسم الدالة :



مثال 3-5

إذا كان لدينا 3 كرات حمراء و5 كرات بيضاء ،اختيرت عينة من 4 كرات ، وكان X يمثل عدد الكرات البيضاء في العينة.أوجد دالة الكتلة الاحتمالية؟ ثم اوجد احتمال أن العينة تحوي 2 كرة بيضاء واحتمال بان العينة تحوي على الأقل 3 كرات بيضاء؟

الحل

عدد عناصر العينة هو $S = \binom{8}{4}$.

وبما إن x يمثل عدد الكرات البيضاء فان : $x = 1, 2, 3, 4$

الحدث $(X = x)$:يمثل الحصول على x كرة بيضاء و$(4 - x)$ كرة حمراء من العينة وعليه فان عدد العينات للحدث $(X = x)$ هي:

$$\binom{5}{x}\binom{3}{4-x}$$

وبذلك يمكن أن نمثل دالة الكتلة الاحتمالية بالشكل الآتي:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{5}{x}\binom{3}{4-x}}{\binom{8}{4}} & , x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

ولحساب احتمال أن العينة تحوي كرتين بيضاء فان:

$$P(X = 2) = f(2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}}$$

أما إذا أردنا حساب، بان العينة تحوي على الأقل ثلاث كرات بيضاء فان:

$$P(x \geq 3) = \sum_{x=3}^{4} f(x) = f(3) + f(4)$$

$$= \frac{\binom{5}{3}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} + \frac{\binom{5}{4}\binom{3}{0}}{\binom{8}{4}}$$

3-3-3 دالة التوزيع الاحتمالي التجميعية

Cumulative Probability Distribution Function

إن المتغير العشوائي X يأخذ قيمة أقل أو تساوي قيمة ما من القيم الممكنة من قيم المتغير العشوائي ، ونسمي هذا النوع من الدوال بدالة التوزيع الاحتمالي التجميعية للمتغير العشوائي X.

ويرمز لهذه الدالة بالرمز $F(x)$ وتعرف بالشكل الآتي:[6]

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

وتحقق الشروط الآتية:

a) $0 \leq F(x) \leq 1$ لان $F(x)$ دالة احتمالية.

b) $F(x)$ دالة غير متناقصة(Nondecreasing)، إذا كان $x_1 < x_2$، فان $F(x_1) = P(X \leq x_1) \leq P(X \leq x_2) = F(x_2)$.

c) $F(\infty) = 1$ و $F(-\infty) = 0$ وذلك لان المجموعة $\{x : x < \infty\}$ ضمن الفضاء R_x، أما المجموعة $\{x : x < -\infty\}$ فهي مجموعة خالية.

حيث أن $-\infty < x < \infty$. وان $0 \leq F(x) \leq 1$. وهذا يعني بان الدالة التجميعية مقيدة بالصفر والواحد.

ملاحظة:

إذا كانت $F(x)$ هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X فان :

$$P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$$

مثال 3-6

لتكن :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{55}x & , x = 1, 2, ..., 10 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع X، أوجد دالة التوزيع ؟ ثم أحسب كل من $P(2 \le x \le 4)$ ، $P(x \le 3)$ ، $P(x > 2)$ ؟

الحل

من تعريف دالة التوزيع فان:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{x} p(n) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{55} n = \frac{1}{55} \sum_{n=1}^{x} n = \frac{1}{55} \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x(x+1)}{110}$$

وعليه تكون الدالة كما يأتي:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ \frac{x(x+1)}{110}, x = 1, 2, ..., 10 \\ 1, x \ge 10 \end{cases}$$

ولحساب:

$$P(2 \le x \le 4) = F(4) - F(2) = \frac{20}{110} - \frac{6}{110} = \frac{14}{110}$$

أما الاحتمال الآتي فيحسب كما يأتي:

$$P(X \le 3) = F(3) = \frac{12}{110} = \frac{6}{55}$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{6}{110} = \frac{104}{110}$$

مثال 3-7

إذا كان معلوماً أن نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من التفاح الأمريكي 600. ، **بينما يكون نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح 400.، اشترى** أحد العملاء عبوتين، فما هو فضاء العينة؟

إذا عُرف المتغير العشوائي X بأنه عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، فأوجد الآتي:

1. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟.
2. ارسم دالة الاحتمال لهذا المتغير؟.
3. كون التوزيع الاحتمالي التجميعي؟.
4. ما هو احتمال $P(X=1)$ ، $P(X \leq 1)$ ، $P(X=1.5)$ ، $P(X \leq 1.5)$ ؟

الحل

لتكوين فضاء العينة نلاحظ بان التجربة هنا هو شراء وحدتين من عبوات التفاح، ومن ثم فان فضاء العينة يتكون من أربع نتائج، هي:

العبوة الأولى		العبوة الثانية		عدد العبوات S	X	$P(X=x)=f(x)$
0.60	أمريكي	0.60	أمريكي	أمريكي ، أمريكي	2	0.36
		0.40	آخر	(آخر، أمريكي)	1	0.24
0.40	آخر	0.60	أمريكي	(أمريكي، آخر)	1	0.24
		0.40	آخر	(آخر، آخر)	0	0.16

والتوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي X :

من المعلوم أن العميل اشترى عبوتين، وأن المتغير العشوائي هو عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

$x=0$ إذا كانت العبوتان من النوع الآخر، أي إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، آخر).

$x=1$ إذا كانت إحدى العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، أمريكي) أو (أمريكي،آخر) .

$x=2$ إذا كانت العبوتان من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (أمريكي ، أمريكي) .

ومن ثم يأخذ المتغير القيم: $X:\{x=0,1,2\}$ ، ويرتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة المناظرة لها كما هو مبين أعلاه، ومن ثم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو كما يأتي:

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي يكون كما يلي:

x_i	$f(x_i)$
0	0.16
1	0.48
2	0.36
$\sum$	1

رسم دالة الاحتمال $f(x_i)$:

ومن اجل تكوين التوزيع الاحتمالي التجميعي نلاحظ بان دالة التوزيع الاحتمالي التجميعي تأخذ الصورة الآتية:

$F(x) = P(X \le x)$

ومن ثم يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي التجميعي لعدد الوحدات المشتراة من التفاح الأمريكي كما يأتي:

جدول التوزيع الاحتمالي، والتوزيع التجميعي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي:

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	0.16	$F(0) = P(X \le 0) = 0.16$
1	0.48	$F(1) = P(X \le 1) = 0.16 + 0.48 = 0.64$
2	0.36	$F(2) = P(X \le 2) = 0.64 + 0.36 = 1.00$
Σ	1	

ولحساب الاحتمالات فان:

$P(X \le 1.5)$ ، $P(X = 1.5)$ ، $P(X \le 1)$ ، $P(X = 1)$

$P(X = 1) = f(1) = 0.48$

$P(X \le 1) = F(1) = 0.64$

$P(X = 1.5) = f(1.5) = 0$

$P(X \le 1.5) = F(1.5) = F(1) = 0.64$

4-3 التوقع الرياضي وخواصه

Mathematical Expectation And Its Properties

سنقدم في هذا الجزء مفهوماً مهماً جداً هو التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X ونناقش بعض خواصه ، حيث يمكن تعريف التوقع بالشكل الآتي:

تعريف 3-1

ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً له دالة التوزيع الاحتمالي (دالة الكتلة الاحتمالية) $f(x)$ على الفضاء R_X ، فان التوقع أو القيمة المتوسطة إلى X هي:

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x f(x)$$

مثال 3-8

إذا كانت قيم دالة الكتلة الاحتمالية هي كالآتي:

$$P(3)=\frac{1}{216} \text{ ، } P(2)=\frac{15}{216} \text{ ، } P(1)=\frac{75}{216} \text{ ، } P(0)=\frac{125}{216}$$

وان قيم المتغير العشوائي هي: $x=0,1,2,3$ وعليه يمكن أن نحسب التوقع للمتغير العشوائي المتقطع X كما يأتي:

$$E(X)=\sum_{x=0}^{3}xf(x)=0(\frac{125}{216})+1(\frac{75}{216})+2(\frac{15}{216})+3(\frac{1}{216})=\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$$

تعريف 3-2

ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة التوزيع الاحتمالي $f(x)$ على الفضاء R_x، فان قيمة التوقع للدالة $u(X)$ يعرف كالآتي :

$\mathrm{E}\{u(X)\}=\sum_{x\in R_x}u(x)f(x)$ على افتراض أن المجموع موجود.[2]

مثال 3-9

لتكن :

$$u(X)=\begin{cases} X-1 & if \quad X=0 \\ X & if \quad X=1,2,3 \end{cases}$$

أحسب التوقع للدالة $u(X)$ على أساس قيم التوزيع الاحتمالي في المثال(3-8) أعلاه ؟

الحل

$$E\{u(X)\}=\sum_{x=0}^{3}u(x)f(x)$$

$$=(-1)(\frac{125}{216})+1(\frac{75}{216})+2(\frac{15}{216})+3(\frac{1}{216})=-\frac{17}{216}$$

وفيما يلي بعض خواص التوقع:

نظرية 3-1

التوقع الرياضي يحقق الخواص الآتية في حالة وجوده وهي :

a) إذا كان c ثابتاً فان $E(c)=c$.

b) إذا كان c ثابتاً و u دالة فان $E\{cu(X)\}=cE\{u(X)\}$.

c) إذا كان $c_1,c_2,\dots,c_k$ ثوابت وان $u_1,u_2,\dots,u_k$ دوال فان :

$$\mathrm{E}\{c_1u_1(X)+c_2u_2(X)+\dots+c_ku_k(X)\}$$
$$=c_1E\{u_1(X)\}+c_2E\{u_2(X)\}+\dots+c_kE\{u_k(X)\}$$

البرهان

برهان الفرع a :

$$E(c)=\sum_{x\in R_X}cf(x)=c\sum_{x\in R_X}f(x)=c$$

لان $\sum_{x\in R_X}f(x)=1$.

برهان الفرع b:

$$E\{cu(X)\}=\sum_{x\in R_X}cu(x)f(x)=c\sum_{x\in R_X}u(x)f\,9x0=cE\{u(X)\}$$

برهان الفرع c :

$$E\{c_1u_1(X)+c_2u_2(X)+\dots+c_ku_k(X)\}$$
$$=c_1\sum_{x\in R_X}u_1(x)f(x)+c_2\sum_{x\in R_X}u_2(x)+\dots+c_k\sum_{x\in R_X}u_k(x)f(x)$$
$$=c_1E\{u_1(X)\}+c_2E\{u_2(X)\}+\dots+c_kE\{u_k(X)\}$$

مثال3-10

ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة التوزيع الاحتمالي الآتية:

$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6} & ,x=1,2,3\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$ ما هو التوقع إلى X^2 و $3(X+3)(X-3)$ ؟

الحل

$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{3}x^2(\frac{x}{6})=(1)^2(\frac{1}{6})+(2)^2(\frac{2}{6})+(3)^2(\frac{3}{6})=\frac{36}{6}=6$$

$$E\{3(X+3)(X-3)\}=E(3X^2-27)=3E(X^2)-E(27)=3(6)-27=-9$$

نظرية 3-2

ليكن $\mu=E(X)$ تمثل الوسط الحساب للمتغير العشوائي X فان :

$E(X-\mu)=0$.

البرهان

$$E(X-\mu)=E(X)-\mu=\mu-\mu=0$$

نظرية 3-3

إذا كان X متغير عشوائياً تباينه $V(X)$ ،وكان c عدداً ثابتاً فان:

a) $V(X+c)=V(X)$

b) $V(cX)=c^2V(X)$

البرهان

الفرع a:

$$V(X+c)=E\left\{[(X+c)-E(X+c)]^2\right\}$$
$$=E\left\{[(X+c)-E(X)-c]^2\right\}$$
$$=E\left[(X-\mu)^2\right]=V(X)$$

ونترك برهان b للطالب.

نظرية 3-4

إذا كان المتوسط للمتغير العشوائي μ والتباين σ^2 فان المتوسط للمتغير العشوائي $X^* = \frac{x-\mu}{\sigma}$ هو:

a) $E(X^*) = 0$

b) $V(X^*) = 1$

البرهان

$$E(X^*) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{E(X)-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = 0$$

$$V(X^*) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

3-5 العزوم للمتغير العشوائي المتقطع

Moments Of A Discrete Random Variable

يرمز للوسط الحسابي للمتغير العشوائي X بالرمز μ ، ويحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\mu = \sum x_i f(x_i) \quad \text{.......(3-1)}$$

وهو يمثل بالحقيقة التوقع للمتغير العشوائي X،وبذلك يكون $\mu = E(X)$ ، وهو يمثل قياساً لمركز التوزيع X .

وأما التباين(Variance) ويرمز له بالرمز σ^2،فهو يمثل قياس لانحراف قيم المتغير X عن المتوسط μ ، فيحسب بتطبيق المعادلة الآتية:

$$\sigma^2 = \mathrm{E}\{(X-\mu)^2\} = \sum_{x \in R_x}(x-\mu)^2 f(x)$$

$$\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

$$= \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

ولبرهان العلاقة أعلاه فان:

$$\sigma^2 = \sum_{x \in R_x} (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) f(x_i)$$

$$= \sum_{x \in R_x} x_i^2 f(x_i) - 2\mu \sum x_i f(x_i) + \mu^2 \sum f(x_i)$$

$$= \sum x_i^2 f(x) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

وبما أن $\sum_{x \in R_X} f(x) = 1$ و $\sum_{x \in R_X} x f(x) = \mu$ فان :

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2 \quad \text{.......(3-2)}$$

وبأخذ الجذر الموجب للتباين نحصل على الانحراف المعياري (Standard Deviation) للمتغير العشوائي X ويرمز له بالرمز σ ويُكتب بالشكل الآتي:

$$\sigma = \sqrt{var(X)} = \sqrt{E(X - \mu)^2} \quad \text{.......(3-3)}$$

مثال 3-11

في المثال السابق(3-4) احسب ما يأتي:

a) الوسط الحسابي لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي؟.

b) احسب الانحراف المعياري لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي؟.

c) أوجد معامل الاختلاف النسبي؟.

الحل

الوسط الحسابي لعدد العبوات من النوع الأمريكي:

لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري يتم استخدام المعادلة (3-1)، (3-2) وهذا يتطلب تكوين جدول يشمل المجاميع الآتية: $\sum x_i^2 f(x_i)$, $\sum x_i f(x_i)$، وذلك كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	0.16	0	0
1	0.48	0.48	0.48
2	0.36	0.72	1.44
Σ	1	1.20	1.92

وعليه يكون الوسط الحسابي هو: $\mu = \sum x_i f(x_i) = 1.20$

أما لحساب الانحراف المعياري فيجب أولا حساب التباين وهو:

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = 1.92 - (1.20)^2 = 0.48$$

وعليه فان الانحراف المعياري يكون:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.48} = 0.693$$

ولحساب معامل الاختلاف النسبي (Coefficient Variation)والذي يرمز له بالرمز $C.V$ فان:

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{0.693}{1.2} \times 100 = 57.7$$

نظرية3-5

إذا كان X متغير عشوائياً له المتوسط μ والتباين σ^2، فان لكل $t \geq 1$ فان :

$$P(|X - \mu| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}$$

البرهان

بما أن $f(x)$ هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X فان :

$$\sigma^2 = E\{(X-\mu)^2\} = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^2 f(x)$$

$$= \sum_{x \in A} (x-\mu)^2 f(x) + \sum_{x \in \bar{A}} (x-\mu)^2 f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3\text{-}4)$$

حيث أن :

$$A = \{x; |x-\mu| \ge t\sigma\}, \overline{A} = \{x : |x-\mu| < t\sigma\}$$

نلاحظ أن الحد الثاني في العلاقة(4-3) هو مجموع غير سالب وعليه فانه يكون اكبر أو يساوي صفراً.

إذن نحصل على : $\sigma^2 \ge \sum_{x\in A}(x-\mu)^2 f(x)$ وبما أن $|x-\mu| \ge t\sigma$

فنحصل على:

$$\sigma^2 \ge \sum_{x\in A}(t\sigma)^2 f(x) = t^2\sigma^2 \sum_{x\in A} f(x) \quad ....(3\text{-}5)$$

وبما أن :

$$\sum_{x\in A} f(x) = P(X\in A) = P(|X-\mu| \ge t\sigma)$$

وبالتعويض في (5-3) نحصل على :

$\sigma^2 \ge t^2\sigma^2 P(|X-\mu| \ge t\sigma)$ وبالقسمة على $\sigma^2 t^2$ نحصل على:

$P(|X-\mu| \ge t\sigma) \le \frac{1}{t^2}$ وهو المطلوب .

مثال3-12

إذا كان للمتغير العشوائي المتقطع X القيمة المتوسطة 50 والتباين 25، فما الحد الأعلى للاحتمال الذي ينحرف عنه X بقيمة على الأقل 20 ؟

الحل

بما إن : $\sigma = \sqrt{25} = 5$

وان $P(|X-50| \ge 20) = P(|X-50| \ge 4\sigma)$

وعليه وحسب النظرية 3-2 فان:

$$P(|X-50| \ge 4\sigma) \le \frac{1}{(4)^2} = \frac{1}{16} = 0.0625$$

نلاحظ بان الوسط والتباين هما أكثر القياسات أهمية لوصفها خصائص التوزيع الاحتمالي وهناك حالات خاصة من العزوم للمتغير العشوائي المتقطع X وسنعرف منها ما يأتي:

تعريف 3-3

ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً و r عدد صحيح موجب فان :

$$\mu_r' = E(X^r) = \sum_{x \in R_X} x^r f(x) \quad \ldots\ldots (3\text{-}6)$$

ويسمى العزم r حول نقطة الأصل (rth moment about the origin).

تعريف 3-4

ليكن X متغير عشوائي متقطع و r عدد صحيح موجب فان :

$$\mu_r = E\{(x-\mu)^r\} = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^r f(x) \quad \ldots\ldots (3\text{-}7)$$

ويسمى العزم المركزي r (rth central moment) للتوزيع X .

من التعريفين أعلاه نلاحظ أننا نستطيع أن نحسب المتوسط $\mu = \mu_1'$

وهو يمثل العزم المركزي الأول حول نقطة الأصل. أما التباين فانه يمثل العزم المركزي الثاني للتوزيع X .

أما العزم المركزي الثالث والرابع فتستخدم في بعض الأحيان ،أي كنسب للعزم وكما يأتي:

$$\gamma_1 = \mu_3 \Big/ \mu_2^{3/2} = \mu_3 \Big/ \sigma^3 \quad \ldots\ldots (3\text{-}8)$$

$$\gamma_2 = \mu_4 \Big/ \mu_2^{2} = \mu_4 \Big/ \sigma^4 \quad \ldots\ldots (3\text{-}9)$$

والتي تستخدم لقياس الالتواء والتفلطح للتوزيع ،وهكذا إذا كان التوزيع متناظر حول المتوسط فان قيمة μ_3 وقيمة γ_1 تكون مساوية إلى الصفر.

والالتواء يكون موجباً إذا كان μ_3 و γ_1 موجبتان. بينما إذا كان الالتواء سالباً فان قيم μ_3 و γ_1 تكون سالبة.

إذا كانت قيمة μ_4 و γ_2 كبيرتان فان التوزيع يكون متفلطحاً نسبياً،أما إذا كانت القيمتان صغيرتان فان التوزيع يكون بارزاً.

6-3 الدالة المولدة للعزم The Moment Generating Function

سنعرف أدناه دالة المتغير الحقيقي t ،والتي تسمى الدالة المولدة للعزم ويرمز لها بالرمز$(m.g.f)$والتي من خلالها نُعرف عددٍ من العزوم إلى X،عندما تكون موجودة.

تعريف3-5

ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً له دالة التوزيع الاحتمالي $f(x) = P(X = x)$ في الفضاء R_X. فان الدالة المولدة للعزم $M_X(t)$ تعرف بالشكل الآتي:

$$M_x(t) = \sum_{x \in R_X} e^{tx} f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(3-10)}$$

ونلاحظ من خلال هذا التعريف بان الدالة $M_X(t)$ تمثل القيمة المتوقعة بالنسبة إلى e^{tx} وعليه سنكتبها بالشكل الآتي:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(3-11)}$$

كذلك نلاحظ بان العلاقة $(3-10)$ تمثل مجموع متسلسلة غير منتهية، وهي لاتقترب دائماً من قيمة منتهية ،كذلك فهي موجودة لجميع قيم t.

عندما نتعامل مع الدالة المولدة للعزم نفترض بأنها موجودة لجميع قيم t بحيث أن $-h < t < h$ لبعض h.

ومن نظرية التحليل الرياضي فان وجود $M_X(t)$ بالنسبة إلى $-h < t < h$ يودي إلى إن مشتقاتها بالنسبة إلى t لجميع الرُتب عندما $t = 0$ تكون موجودة.إي أن:

$$M'_x(t) = \frac{d}{dt}\{M_x(t)\} = \sum_{x \in R_x} x e^{tx} f(x)$$

$$M_x''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\{M_x(t)\} = \sum_{x \in R_x} x^2 e^{tx} f(x)$$

وبشكلٍ عام لكل عدد موجب r فان :

$$M_x^{(r)}(t) = \frac{d^r}{dt^r}\{M_x(t)\} = \sum_{x \in R_x} x^r e^{tx} f(x)$$

وعندما نضع $t=0$ نحصل على :

$$M_x'(0) = \sum_{x \in R_x} x e^{0t} f(x) = \sum_{x \in R_X} x f(x) = E(X) \text{ ....(3-12)}$$

$$M_x''(0) = \sum_{x \in R_x} x^2 e^{0t} f(x) = \sum_{x \in R_x} x^2 f(x) = E(X^2) \text{ ....(3-13)}$$

وبشكل عام نحصل على:

$$M_x^{(r)}(0) = \sum_{x \in R_x} x^r f(x) = E(X^r), r = 1, 2, \text{ ....(3-14)}$$

وعليه إذا كانت الدالة المولدة للعزم موجودة فإننا نستطيع أن نوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي المتقطع X وكما يأتي:

$$\mu = M_x'(0), \sigma^2 = M_x''(0) - \{M_x'(0)\}^2 \text{ ....(3-15)}$$

مثال3-13

ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً له دالة التوزيع الاحتمالي الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^x, x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, otherwise \end{cases}$$

،أوجد الدالة المولدة للعزم $(m.g.f)$؟ثم أوجد المتوسط والتباين بالنسبة إلى X ؟.

الحل

من العلاقة(3-10) فان الدالة المولدة للعزم هي:

$$M_x(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^x = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{2e^t}{3}\right)^x$$

حيث نلاحظ إن المجموع أعلاه عبارة عن متسلسلة هندسية متناوبة ،وان تقارب هذه المتسلسلة يعطينا النسبة المشتركة $\frac{2e^t}{3} < 1$ أوأن $t < log(\frac{3}{2})$،ولذلك فان الدالة المولدة للعزم تعطى بالشكل الآتي:

$$M_x(t) = \frac{1}{2}\frac{(^{2e^t}/_3)}{1-(^{2e^t}/_3)} = \frac{e^t}{3-2e^t}$$ بالنسبة إلى $t < log(\frac{3}{2})$.

وان المشتقة الأولى والثانية هي:

$$M_x'(t) = \frac{3e^t}{(3-2e^t)^2} \quad , M_x''(t) = \frac{3e^t(3+2e^t)}{(3-2e^t)^3}$$

كذلك فانه بوضع $t = 0$ فان :

$$M_x'(0) = \frac{3e^t}{(3-2e^t)^2} = \frac{3e^0}{(3-2e^0)^2} = 3 , M_x''(0) = \frac{3e^0(3+2e^0)}{(3-2e^0)^3} = 15$$

وعليه ومن العلاقة (3–15) فان:

$$\mu = M_x'(0) = 3 , \sigma^2 = M_x''(0) - \{M_x'(0)\}^2 = 15 - (3)^2 = 6$$

ملاحظة:

سنذكر في الفصول ألاحقة ، عن الدالة المولدة للعزم بمتغيرين ونلاحظ العلاقات المهمة التي سوف نستنتجها منها لتبيان أهمية هذه الدالة.

مثال 3-14

لتكن الدالة المولدة للعزم للمتغير العشوائي المتقطع هي:

$M_x(t) = \frac{1}{10}e^t + \frac{2}{10}e^{3t} + \frac{4}{10}e^{5t} + \frac{2}{10}e^{7t} + \frac{1}{10}e^{9t}$، أوجد قيم X والتوزيع الاحتمالي لها؟

الحل

القيم هي: $X = 1, 3, 5, 7, 9$ وان التوزيع الاحتمالي هو:

$$f(1) = \frac{1}{10}, f(3) = \frac{2}{10}, f(5) = \frac{4}{10}, f(7) = \frac{2}{10}, f(9) = \frac{1}{10} .$$

7-3 التحويل في المتغيرات العشوائية المتقطعة

لتكن الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي X والمتغير العشوائي Y الذي يُعرف بالشكل التالي:

$$Y = g(X) \quad \text{.......... (3-15)}$$

وإذا كانت قيم X هي x_i وقيم Y هي $y_i = g(x_i)$، ولكل قيمة من قيم X توجد قيمة وحيدة إلى $g(X)$، وعليه فان الدالة الاحتمالية إلى Y هي:

$$f_Y(y) = f_X(X) \quad \text{.......... (3-16)}$$

حيث أن $f_X(X)$ هي الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي X وان:

$$X = g^{-1}(Y) \quad \text{.......... (3-17)}$$

وهذه العلاقة تعني الدالة العكسية للعلاقة $(3-15)$.

مثال 3-15

لتكن :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{55}x & , x = 1, 2, \ldots, 10 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع X، وليكن $Y = 3x + 2$ دالة للمتغير العشوائي X أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي Y؟

الحل

من العلاقتين $(3-16)$ و $(3-17)$ وبما أن $Y = 3x + 2$ فان $X = \frac{y-2}{3}$ وعليه فان الدالة الاحتمالية للمتغير Y هي:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{55}\left(\frac{y-2}{3}\right) = \frac{y-2}{165}, y = 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

وبما أن دالة التوزيع التجميعية للمتغير X هي:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<1 \\ \frac{x(x+1)}{110}, x=1,2,...,10 \\ 1, x\geq 10 \end{cases}$$

فان دالة التوزيع للمتغير العشوائي Y هي:

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, y<5 \\ \frac{(y-2)(y-1)}{110}, x=1,2,...,10 \\ 1, y\geq 32 \end{cases}$$

تمارين الفصل الثالث

1. فيما يأتي التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من أحد مساحيق النظافة خلال الشهر X ، $X :\{ x =0,1,2,3,4,5\}$

x (عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة)	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	.150	.300	.250	.230	.050	.020

اوجد مايلي :

مانوع هذا المتغير (عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة)؟.

ثم احسب الوسط والوسيط والمنوال والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة؟.

كون جدول التوزيع التجميعي $F(x)$ ثم أوجد الآتي:

a) نسبة الأسر التي يقل استهلاكها عن وحدتين؟

b) نسبة الأسر التي يزيد استهلاكها عن 3 وحدات؟

c) إذا كان لدينا 500 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يكون استهلاكها على الأقل 3 وحدات؟

d) احسب معامل الالتواء، وكذلك معامل الاختلاف النسبي، وعلق على النتائج؟.

2. ألقيت قطعتا نقود ، وكان X يمثل المتغير العشوائي للصور الظاهرة على الوجه العلوي .أكتب قيم المتغير العشوائي ثم احسب احتمال كل متغير؟

3. أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات ظهور صورة في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات؟

4. إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول التالي:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.2	0.1	0.3	0.4

احسب التباين والانحراف المعياري للمتغير X ؟

5. إذا كان X متغير عشوائي متقطع يأخذ القيم 100، 50، 80 باحتمالات 0.6، 0.3، 0.1، أوجد تباين المتغير العشوائي $Y = \dfrac{X-80}{10}$ ؟

6. كيس فيه 3 كرات بيضاء و7 كرات حمراء ،سُحبت عينه من ثلاثة كرات بدون أعادة ،فإذا كان المتغير العشوائي يمثل الفرق بين عدد الكرات البيضاء والحمراء في العينة ،أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي $Y = 5X - 7$ ؟

7. إذا كان X يمثل متغيراً عشوائياً متقطعاً له دالة الكتلة الاحتمالية الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} 2kx, x = 1, 2, 3 \\ k(1+2x), x = 4, 5, 6, 7 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

أوجد قيمة الثابت k ؟ثم أحسب الاحتمال $P(2 < X < 5)$ و $p(x = 6)$ ؟

8. هل أن الدالة أدناه هي دالة كتلة احتمالية أم لا:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}, x = 1, 2, \ldots \\ 0, otherwise \end{cases}$$ ؟

9. ليكن X يمثل متغيراً عشوائياً متقطعاً له دالة الكتلة الاحتمالية الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} cx, x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, otherwisw \end{cases}$$ فأوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير X ؟

10. ليكن X يمثل متغيراً عشوائياً متقطع له دالة الكتلة الاحتمالية الآتية:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{10}, & x=1,2,3,4,5\\ 0, & otherwisw\end{cases}$$

فأوجد دالة التوزيع التجميعية للمتغير X ؟

ثم ارسم الدالة، واوجد $P(1\le x<\frac{3}{2})$ ، $P(x\le 2)$ ، $P(x>3)$ ؟

11. إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً حيث إن $x=1,2,....,n$ وله دالة الكتلة الاحتمالية (p.m.f) هي: $f(x)=\frac{c\binom{n}{x}}{(x+1)}\ ,x=1,2,3,...,n$ و $f(x)=0$ في الحالات الأخرى : احسب قيمة c ؟ ثم اثبت أن : $\mu=\frac{(n-1)2^{n}+1}{(2^{n+1}-1)}$ وان $\sigma^{2}=\frac{(n+1)2^{n-1}\{2^{n+1}-(n+2)\}}{(2^{n+1}-1)^{2}}$ ؟

الفصل الرابع

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة

4-1 توزيع برنولي

4-2 التوزيع ثنائي الحدين

4-3 التوزيع البواسوني

4-4 التوزيع الهندسي

4-5 التوزيع ثنائي الحدين السالب

4-6 التوزيع الهيبر جيومتري

تمارين الفصل الرابع



الفصل الرابع

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة

SPECIAL DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

في كثير من النواحي التطبيقية، تتبع بعض الظواهر توزيعات احتمالية خاصة، وهي التوزيعات التي بها يمكن حساب احتمالات قيم المتغير عن طريق معادلة رياضية، تسمى دالة الاحتمال $f(x)$ ، وهذه المعادلة لها معالم معينة، تسمى بمعالم المجتمع الذي ينسب له هذا التوزيع، وهذه المعالم ما هي إلا حقائق ثابتة مجهولة، وهي الأساس في حساب القيم الاحتمالية للتوزيع الاحتمالي للمجتمع محل الدراسة.

ومن أهم التوزيعات التي سيتم دراستها في هذا الفصل ما يأتي.

4-1 توزيع برنولي Bernoulli Distribution

في تجربةٍ ما إذا كانت النتائج المتوقعة لهذه التجربة عبارة عن احتمالين هما احتمال النجاح واحتمال الفشل ، حيث إننا سنرمز لاحتمال النجاح بالرمز P ونرمز لاحتمال الفشل بالرمز $q=1-P$،

وعلى هذا الأساس فأن نتائج التجربة ستخضع لتوزيع بيرنولي والذي يعرف بالصيغة الآتية: [2]

$$P(x_i, p) = \begin{cases} p & , x=1 \\ 1-p & , x=0 \\ 0 & , otherwise \end{cases} \qquad \text{.........(4-1)}$$

ومن خلال العلاقة $(3-10)$ ومشتقاتها الأولى والثانية بالنسبة إلى t يمكن أن

نحسب المتوسط والتباين للتوزيع وكما يأتي:

فان: $M_x(t) = \sum_{x\in R_X} e^{tx} f(x)$

$$M_x(t) = \sum_{x\in R_x} e^{tx_i} p(x_i)$$

$$= (1-p) + e^t p \quad \text{.......................................}(4\text{-}2)$$

وعليه وباشتقاق العلاقة(4-2) بالنسبة إلى t نحصل على:

$$M'_x(t) = pe^t$$

وهو يمثل العزم الأول وبوضع $t = 0$ يكون :

$M'_x(0) = pe^0 = p = E(X) = \mu$ ويمثل متوسط التوزيع.

أما العزم الثاني فان :

$M''_x(t) = pe^t$ وبوضع $t = 0$ يكون :

$$M''_x(0) = pe^0 = p = E(X^2)$$

ومنه نحصل على التباين :

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = P - P^2$$

$$= p(1-p) = pq$$

مثال4-1

ألقيت قطعة نقود مرة واحدة وكان احتمال ظهور الكتابة H يساوي صفراً، واحتمال ظهور الصورة T يساوي واحداً، فما هي دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X ؟

الحل

نلاحظ إن ظهور الكتابة والصورة حدثان متساويان وبالتالي فان: $p(H) = p(T) = \frac{1}{2}$ ومنها تكون دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X كما يأتي:

$$p(X_i, \frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,x = 1 \\ \frac{1}{2} & ,x = 0 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

2-4 التوزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط كما هو الحال في توزيع بيرنولي وهما نتيجتان متنافيتان، النتيجة محل الاهتمام تسمى بحالة النجاح، والأخرى تسمى بحالة الفشل، ومن أمثلة ذلك: [7]

- عند إعطاء مريض نوع معين من الأدوية، لها نتيجتان: (استجابة للدواء، أو عدم استجابة) .
- عند فحص عبوة بداخلها نوع معين من الفاكهة، لها نتيجتان
- (الوحدة إما أن تكون سليمة، أو تكون معيبة).
- عند إلقاء قطعة عملة، لها نتيجتان (ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، أو الوجه الذي يحمل الكتابة).
- نتيجة الطالب في الاختبار (نجاح، رسوب) .
- استخدام المزارع لبرنامج معين في الزراعة (يستخدم،أولا يستخدم).

إن شكل التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين إذا كُررت المحاولة n من المرات، بحيث أن كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما:

النتيجة محل الاهتمام" حالة نجاح" وتتم باحتمال ثابت في كل محاولة هو p .

النتيجة الأخرى" حالة فشل" وتتم باحتمال ثابت أيضا هو $q = 1 - p$

وبافتراض أن هذه المحاولات مستقلة، بمعنى أن نتيجة كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجة المحاولة الأخرى، وإذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد حالات النجاح "عدد النتائج محل الاهتمام" في الـ n محاولة، فإن مدي المتغير العشوائي X والذي يعبر عن عدد حالات النجاح هو: $X:\{x=0,1,2,...,n\}$، ومن ثم يحسب الاحتمال $P(X=x)=f(x)$ بتطبيق المعادلة الآتية:

$$f(x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} \qquad ,x=0,1,2,...,n$$

حيث أن $\binom{n}{x}$ هي عدد طرق اختيار x من n مع إهمال الترتيب، وتحسب كما يلي:

$$\binom{n}{x}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{x(x-1)(x-2)...\times 3\times 2\times 1}$$

$$\binom{7}{3}=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35 \quad = \binom{7}{4}$$

$$\binom{7}{0}=\binom{7}{7}=1$$

سوف نرمز لهذا التوزيع بالرمز $b(x,n,p)$.

مثال 4-2

إذا كان من المعلوم أن نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام نوع معين من العقاقير الطبية هو 0.60، إذا تناول هذا العقار 5 مصابين بهذا المرض. فإذا عُرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الذين يستجيبون (حالات الشفاء) لهذا العقار.

المطلوب:

a) ما هو نوع المتغير؟

b) اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير؟.

c) احسب الاحتمالات الآتية:

- ما احتمال استجابة 3 مرضى لهذا العقار؟
- ما هو احتمال استجابة مريض واحد على الأقل؟
- ما هو احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر؟

d) احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة.

e) حدد شكل التوزيع.

الحل

عدد حالات الاستجابة X متغير كمي متقطع ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو: $X : \{ x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$:

وان شكل دالة الاحتمال: $n = 5$، $p = 0.60$، $q = 1 - p = 0.40$ يكون:

$$f(x) = \binom{n}{x} (p)^x (q)^{n-x}$$

$$= \binom{5}{x} (0.6)^x (0.4)^{5-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

حساب الاحتمالات:

- حساب احتمال استجابة 3 مرضى لهذا الدواء: $P(x = 3) = f(3)$

$$f(3) = \binom{5}{3} (0.6)^3 (0.4)^{5-3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times 0.216 \times 0.16 = 10 \times 0.03456$$

$$= 0.3456$$

- حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل: $P(x \geq 1)$

$$P(x \geq 1) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 1 - f(0)$$

$$= 1 - \left[\binom{5}{0} (0.6)^0 (0.4)^5 \right] = 1 - 1 \times 1 \times 0.01024 = 0.98976$$

- حساب احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر: $P(x \leq 2)$:

$$P(x \leq 2) = f(2) + f(1) + f(0)$$

$$=\binom{5}{2}(0.6)^2(0.4)^3+\binom{5}{1}(0.6)^1(0.4)^4+\binom{5}{0}(0.6)^0(0.4)^5$$

$$=\frac{5\times 4}{2\times 1}(0.36)(0.064)+\frac{5}{1}(0.6)(0.0256)+1(1)(0.01024$$

$$=0.2304+0.0768+0.01024=0.31744$$

وحساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة فان :

الوسط الحسابي (μ) في حالة التوزيع ثنائي الحدين يحسب بتطبيق المعادلة أدناه وباستخدام العمليات الرياضية يمكن الوصول إلى النتيجة التالية:

$$\mu=\sum x \ f(x)=np$$

فان الوسط الحسابي هو:

$$\mu=np=5(0.60)=3$$

أما الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين، ولحساب التباين في التوزيع ثنائي الحدين يتم تطبيق المعادلة (2-3)، ومنها يمكن التوصل إلى الصورة الآتية:

$$\sigma^2=npq$$

يمكن كذلك أن نستخدم العزوم من العلاقات (10-3) و(11-3) التي وردت في الفصل الثالث لحساب التباين:

$$M_x(t)=\mathrm{E}(e^{tx})=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}f(x)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x}=(q+pe^t)^n$$

وبأخذ المشتقة الأولى فان:

$$M'_x(t)=n(q+pe^t)^{n-1}(pe^t)$$

كذلك فان المشتقة الثانية تكون:

$$M''_x(t) = n(n-1)(q+pe^t)^{n-2}(pe^t)^2 + n(q+pe^t)^{n-1}(pe^t)$$

وبعد التبسيط وبما أن $p+q=1$ فان:

$M'_x(0)=np$ وان $M''_x(0)=n(n-1)p^2+np$ وعليه فان:

$$\sigma^2 = M''_x(0) - \{M'_x(0)\}^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

$$= npq$$

إذاً تباين عدد حالات الاستجابة هو:

$$\sigma^2 = npq$$
$$= 5(0.60)(0.40) = 1.2$$

ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري الصورة الآتية:

$$\sigma = \sqrt{npq}$$
$$= \sqrt{1.2} = 1.095$$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة الآتية:

$$V.C = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1.095}{3} \times 100 = 36.5\%$$

أما شكل التوزيع فيتحدد كما يأتي:

يتحدد شكل التوزيع ثنائي الحدين وفقا لقيمة احتمال النجاح p كما يلي:

إذا كان $p=0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون متماثل.

إذا كان $p<0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون موجب الالتواء.

إذا كان $p>0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون سالب الالتواء.

وحيث أن $p=0.6>0.5$ فإن توزيع عدد حالات الاستجابة سالب الالتواء.

مثال 4-3

صندوق يحتوي على 5 كرات سوداءو 10 كرات حمراء ،سُحبت منه 3 كرات مع الإعادة .احسب ما يأتي:

a) احتمال ظهور كرة سوداء من بين الكرات المسحوبة؟

b) احتمال ظهور كرة سوداء أو أكثر من الكرات المسحوبة؟

الحل

ليكن X يمثل عدد الكرات المسحوبة .

كذلك فان $n=3$ و $p=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

وعليه فان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X هي :

$$P(x,n,p)=p(x,3,\frac{1}{3})=\begin{cases}\binom{3}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-x} & ,x=0,1,2,3\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

ومن الدالة اعلاه نحسب احتمال ظهور كرة سوداء من الكرات المسحوبة أي أن :

إذا كان $x=1$ فان $p(1,3,\frac{1}{3})=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{4}{9}$

أما لحساب احتمال ظهور كرة سوداء أو أكثر فان:

$$p(x\geq 1)=p(1,3,\frac{1}{3})+p(2,3,\frac{1}{3})+p(3,3,\frac{1}{3})$$

$$=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$

$$=\frac{12}{27}+\frac{6}{27}+\frac{1}{27}=\frac{19}{27}$$

أو نقول : $p(x\geq 1)=1-p(x<1)=1-p(X=0)$

$$= 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}.\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

أما بالنسبة إلى دالة التوزيع التجميعية فهي:

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x}\binom{n}{r}p^{r}q^{n-r} \quad \text{.................................(4-3)}$$

حيث يمكن لنا ومن خلال جدول توزيع الثنائي الحدين المرفق في ملاحق الكتاب أن نحسب الدالة في العلاقة $(4-3)$ فمثلا اذا كان $n = 10$ و $p = 0.20$ فإن $p(X \le 2) = 0.6778$ وكذلك فإن: $p(X \ge 3) = 1 - 0.6778 = 0.2222$ يتم حسابها من الجداول.

3-4 التوزيع البواسوني Poisson Distribution

يكثر استخدام هذا التوزيع في الحالات التي تقع فيها الأحداث وفقا لمعدلات زمنية، وكذلك في حالة الأحداث نادرة الوقوع، ومن أمثلة ذلك:[7]

- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر. $X : \{x = 0, 1, 2, \ldots\}$
- عدد مرات ري نوع معين من المحاصيل الزراعية خلال الموسم. $X : \{x = 0, 1, 2, \ldots\}$
- عدد العملاء الذين يتم خدمتهم البنكية كل 10 دقائق. $X : \{x = 0, 1, 2, \ldots\}$
- عدد مرات زيارة المريض للطبيب كل سنة. $X : \{x = 0, 1, 2, \ldots\}$
- عدد مرات تناول الأسرة للحوم الحمراء خلال الأسبوع. $X : \{x = 0, 1, 2, \ldots\}$
- عدد أخطاء الطباعة لكل صفحة من صفحات الكتاب. $X : \{x = 0, 1, 2, \ldots\}$

وهكذا الأمثلة كثيرة.

إذا كان متوسط عدد مرات وقوع حادث وفقا لمعدل زمني معين هو μ، وكان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد مرات وقوع الحادث وفقا لهذا المعدل،

فإن مدى المتغير العشوائي X هو: $X:\{x=0,1,2,...\}$، وهذا المدى عبارة عن فئة مفتوحة من اليمين، فإن الاحتمال $P(X=x)=f(x)$ والذي يعبر عن احتمال وقوع الحادث عدد x من المرات وفقا لهذا المعدل، يحسب بتطبيق المعادلة الآتية:

$$f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} \quad ,x=0,1,2,...$$

حيث أن e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي، وتوجد في بعض الآلات الحاسبة، وقيمتها هي: $e=2.718$ تقريبا، ويمكن حساب قيمتها باستخدام الآلة الحاسبة بإتباع الخطوات التالية من الشمال إلى اليمين:

مثلا إيجاد $e^{-1.5}$

SHIFT | e^{x} | (-) | 1.5 | = | 0.22323016 | النتيجة ____

وأما $x!$ فتسمى "مضروب العدد x" ويساوي:

$$x!=x(x-1)(x-2)...3\times 2\times 1$$

ومن خصائص هذا التوزيع ما يأتي:

a) $\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$

b) العزم المولد له يكون:

$$M_{x}(t)=\sum_{x=0}^{+\infty}e^{tx}\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}=e^{\mu(e^{t}-1)} \quad ....(4-3)$$

c) القيمة المتوقعة للمتغير X هي $E(X)=\mu$

d) التباين للمتغير X هو $V(X)=\mu$.

ويمكن البرهنة على الخاصية c و d وذلك باستخدام دالة العزم المولدة وكما يأتي:

برهان c:

$$M_x(t)=E(e^{tx})=\sum_{x=0}^{+\infty}e^{tx}\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}=e^{-\mu}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\mu e^t)^x}{x!}$$

$$=e^{-\mu}e^{\mu e^t}=e^{\mu(e^t-1)}$$

وبأخذ المشتقة لهذه الدالة نحصل:

$$M'_x(t)=\mu e^t e^{\mu(e^t-1)}=\mu e^{t+\mu(e^t-1)}$$

$$M'_x(0)=\mu e^{0+\mu(e^0-1)}=\mu=E(X)$$

وبأخذ المشتق الثانية نحصل على:

$$M''_x(t)=\mu e^{t+\mu(e^t-1)}(1+\mu e^t)$$

$$=\mu(1+\mu e^t)e^{t+\mu(e^t-1)}$$

$$M''_x(0)=\mu(1+\mu e^0)e^{0+\mu(e^0-1)}=\mu+\mu^2$$

وعليه يمكن إيجاد التباين وكما يلي:

$$\sigma^2=M''_x(0)-\{M'_x(0)\}^2=\mu+\mu^2-\mu^2=\mu$$

مثال 4-4

إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

a) ما هو نوع المتغير العشوائي؟

b) اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

c) احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر؟

- احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟

d) احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

e) حدد شكل التوزيع.

الحل

عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة X متغير كمي متقطع ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو: $X:\{x=0,1,2,3,...\}$: شكل دالة الاحتمال.

بما أن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو: $\mu=3$، إذاً دالة الاحتمال هي:

$$f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$
$$=\frac{e^{-3}3^{x}}{x!}\ ,\ x=0,1,2,...$$

حساب الاحتمالات

- حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتين خلال الشهر

$$f(2)=\frac{e^{-3}3^{2}}{2!}=\frac{0.0498(9)}{2\times1}=0.22404$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر هو:

$$P(X\geq1)=f(1)+f(2)+....$$
$$=1-f(0)=1-\frac{e^{-3}3^{0}}{0!}=\frac{0.0498}{1}=1-0.0498=0.9502$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر هو:

$$P(X \leq 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$
$$= \frac{e^{-3} 3^3}{3!} + \frac{e^{-3} 3^2}{2!} + \frac{e^{-3} 3^1}{1!} + \frac{e^{-3} 3^0}{0!} \frac{0.0498}{1}$$
$$= 0.0498 \left(\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1} \right) = 0.0498(13) = 0.6474$$

ولحساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

الوسط الحسابي (μ) في حالة التوزيع البواسون هو معلمة معطاة هي: $\mu = 3$. في هذا التوزيع، فإن التباين يساوي الوسط الحسابي:

أي أن: $\sigma^2 = \mu = 3$ ، ومن ثم يكون الانحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{3} = 1.732$$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التي سبق استخدامها في الفصل السابق، وهو:

$$V.C = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1.732}{3} \times 100 = 57.7\%$$

ملاحظة:

التوزيع البواسوني موجب الالتواء دائما.

نظرية 1-4

يتحول التوزيع ثنائي الحدين إلى توزيع بواسون بمعلمة $\mu = np$ إذا كانت p تقترب إلى الصفر و $1-p$ تقترب إلى الواحد،وكذلك إذا كان $n \to \infty$.

البرهان

بما أن التوزيع الثنائي الحدين هو:

$$P(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad , x = 0, 1, 2, ..., n$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)....(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x} \; ......\mathbf{(4\text{-}4)}$$

وبما ان $\mu = np$ فان $p = \frac{\mu}{n}$ و $1 - p = \frac{n-\mu}{n}$ وبالتعويض عن هذه القيم في العلاقة (4 – 4) فان :

$$p(x,n,p) = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-x+1)^{x}}{x!}\left(\frac{\mu}{n}\right)^{x}\left(\frac{n-\mu}{n}\right)^{n-x}.$$

$$p(x,n,p) = \frac{\mu^{x}}{x!}\left[\frac{n(n-1)(n-2)....(n-x+1)^{x}}{n^{x}}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}\right].$$

وبأخذ النهاية للطرف الأيمن عندما $n \to \infty$ نحصل:

$$p(x,n,p) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu^{x}}{x!}\left[\frac{n(n-1)(n-2)....(n-x+1)^{x}}{n^{x}}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}\right].$$

$$= e^{-\mu}\frac{\mu^{x}}{x!}$$

وهذا يمثل توزيع بواسون.**[2]**

مثال 4-5

ليكن المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع بواسون وان $P(x=2) = \frac{2}{3}p(x=1)$ فاوجد $p(x \geq 3)$ ؟

الحل

لإيجاد التوزيع يجب أن نجد معلمة التوزيع حيث أن :

$e^{-\mu}\frac{\mu^{2}}{2!} = \frac{2}{3}e^{-\mu}\frac{\mu}{1!}$ ومنه نحصل على $\mu^{2} = \frac{4}{3}\mu$ وبذلك يكون $\mu = \frac{4}{3}$

إذن تكون دالة الاحتمالية للتوزيع هي:

$$p(X,\mu)=\begin{cases} e^{-\frac{4}{3}}\dfrac{\left(\frac{4}{3}\right)^{x}}{x!}, x=0,1,2,\ldots \\ 0, otherwise \end{cases}$$

ومن هذه الدالة نحسب الاحتمال:

$$p(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)=1-\sum_{x=0}^{2}e^{-\frac{4}{3}}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{x}}{x!}.$$

ملاحظة:

يمكن استخدام جداول بواسون المرفقة مع ملاحق الكتاب لحساب الاحتمال $p(X\geq 6)$ على سبيل المثال ،فإذا كانت $n=100$ و $p=0.03$ فان:

$$p(X\geq 6)=1-p(X\leq 5)=1-0.916=0.084$$

حيث تم حساب قيمة $\lambda=np=100(0.03)=3$ ومن ثم اخذ هذه القيمة بنظر الاعتبار ومتابعة الجدول على أساسها.

4-4 التوزيع الهندسي Geometric Distribution

إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً فانه في حالة خضوعه للتوزيع ثنائي الحدين فيسمى التوزيع الهندسي وتكون دالته بالشكل الآتي:

$$P(1;x,P)=\binom{x}{1}pq^{x-1}, x=0,1,2,\ldots,n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4\text{-}5)$$

إن x تمثل ضعف دالة التوزيع الهندسي وعليه تكون الدالة الاحتمالية للتوزيع $p(x,p)=\dfrac{p(1;x,p)}{x}$ وبذلك يمكن أن نعبر عنها كما يأتي:

$$p(x,p)=\begin{cases} p(1-p)^{x-1}, x=0,1,2\ldots. \\ 0, otherwise \end{cases}$$

نجد الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي X وذلك من خلال إيجاد دالة المولدة لهذا المتغير :

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} p(1-p)^{x-1}$$

$$= pe^t \sum_{x=1}^{\infty} \{(1-p)e^t\}^{x-1}$$

$$= pe^t \{1-(1-p)e^t\}^{-1}$$

$$= \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \qquad , t < -log(1-p)$$

وباشتقاق الدالة $M_x(t)$ نحصل على:

$$M'_x(t) = \frac{pe^t}{\{1-(1-p)e^t\}^2}$$

$M'_x(0) = \frac{p}{p^2e^0} = \frac{1}{p} = E(X)$ وهو يمثل المتوسط للتوزيع.

ولإيجاد المشتقة الثانية للدالة $M_x(t)$ نحصل على:

$$M''_x(t) = \frac{pe^t(1+(1-p)e^t)}{\{1-(1-p)e^t\}^3} = \frac{p(1+(1-p))}{p^3e^{3t}} = \frac{(1+(1-p))}{p^2e^{3t}}$$

وبوضع $t=0$ نحصل على:

$M''_x(0) = \frac{(1+(1-p))}{p^2}$ وعليه فان التباين يكون:

$$\sigma^2 = V(X) = M''_x(0) - \{M'_x(0)\}^2 = \frac{(1+(1-p))}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

وتكون دالة التوزيع التجميعية للمتغير X هي :

$$F(X) = \sum_{n=1}^{x} p(1-p)^{n-1} = p\frac{1-(1-p)^x}{p} = 1-(1-p)^x$$

والتي يمكن كتابتها بالصيغة التالية:[7]

$$F(X)=\begin{cases} 0 & ,x<1 \\ 1-(1-p)^{x} & ,x=1,2,\ldots \\ 1 & ,x\to+\infty \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots(4-6)$$

مثال 4-6

كيس يحتوي على 8 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء سُحبت من الكيس كرة واحدة مع الإعادة والمطلوب:

a) اذا كان x يمثل عدد مرات سحب كرة بيضاء .أوجد القيمة المتوقعة والتباين ثم أوجد دالة التوزيع التجميعية للمتغير العشوائي X ؟

b) احتمال ظهور كرة بيضاء في أول سحب من السحبة الخامسة؟

الحل

نلاحظ أن احتمال سحب كرة بيضاء هو $P(x)\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ وعليه وبما أن X له توزيع هندسي فان :

$$P\left(x,\frac{2}{3}\right)=\begin{cases} \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{x-1} & ,x=1,2,\ldots \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

وتكون القيمة المتوقعة للمتغير X هو: $E(X)=\frac{1}{P}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$

أما التباين فيكون: $V(X)=\frac{1-P}{P^{2}}=\frac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}=\frac{3}{4}$

ولإيجاد دالة التوزيع التجميعية فان:

$$F(X)=\begin{cases} 0 & ,x<1 \\ 1-(1-\frac{2}{3})^{x} & ,x=1,2,\dots \\ 1 & ,x\to+\infty \end{cases} \quad \dots\dots\dots(4-7)$$

وللحصول على كرة بيضاء في أول سحب من السحبة الخامسة:

$$P\left(5,\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}=\frac{2}{243}$$

5-4 التوزيع ثنائي الحدين السالب Negative Binomial Distributions

يُستخدم هذا التوزيع في حالة وجود حدثين متنافيين أي نجاح وفشل،وان دالة التوزيع الاحتمالي له تُكتب بالشكل الآتي:

$$f(x_i)=\binom{x-1}{r-1}p^{r}q^{x-r} \quad ,x=r,r+1,r+2,\dots$$

نلاحظ بان $(x-1)$ تمثل عدد حالات النجاح ،حيث أن لدينا $(r-1)$ من حالات النجاح.

ملاحظة:

إن التوزيع الهندسي في(4-5) هو حالة خاصة من التوزيع الثنائي السالب ونحصل عليه بمجرد وضع $r=1$.

ويمكن حساب القيمة المتوقعة والتباين للتوزيع الثنائي السالب ،وذلك من خلال إيجاد الدالة العزوم المولدة للمتغير X وكما يأتي:

دالة العزم المولدة للتوزيع الثنائي السالب هي:

$$M_x(t)=E(e^{tx})=\sum_{x=r}^{\infty}e^{tx}\binom{x-1}{r-1}p^{r}q^{x-r}$$

$$=(pe^{t})^{r}\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}e^{t(x-r)}q^{x-r}$$

$$=(pe^t)^r\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}(qe^t)^{x-r}$$

إن المجموع في العلاقة اعلاه نحصل عليه اذا كان $qe^t<1$ أو $t<-\log(1-p)$
ويعطى ناتج المجموع بـ $(1-qe^t)^{-r}$أي أن:

$$M_x(t)=(pe^t)(1-qe^t)^{-r}$$

$$=\frac{(pe^t)^r}{(1-qe^t)^r}=\left[\frac{pe^t}{1-qe^t}\right]^r, t<-\log(1-p)\text{.............}\textbf{(4-8)}$$

وهذه تمثل دالة العزم المولدة للمتغير X،ولإيجاد القيمة المتوقعة نشتق الدالة بالنسبة إلى t فنحصل على:

$$M'_x(t)=r\left[\frac{pe^t}{1-qe^t}\right]^{r-1}\left(\frac{(1-qe^t)pe^t-\left[pe^t(-qe^t)\right]}{(1-qe^t)^2}\right)$$

$$=\frac{rp^{r-1}e^{t(r-1)}}{(1-qe^t)^{r-1}}\frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}$$

$$M'_x(t)=\frac{rp^re^{tr}}{(1-qe^t)^{r+1}}\text{..}\textbf{(4-9)}$$

ومن ثم وبنفس الأسلوب نجد المشتقة الثانية لدالة العزم المولدة فنحصل على:

$$M''_x(t)=\frac{rp^re^{tr}(r+qe^t)}{(1-qe^t)^{r+2}}\text{...}\textbf{(4-10)}$$

وعند وضع $t=0$ في العلاقتين(4-9) و(4-10) نحصل على القيمة المتوقعة والتباين وكما يأتي:

$$\mu=M'_x(0)=\frac{r}{p}\text{..}\textbf{(4-11)}$$

وكذلك $M''_x(0)=\frac{r(r+q)}{p^2}$ وعليه يكون:

$$\sigma^2=M''_x(0)-\{M'_x(0)\}^2=\frac{r(r+p)}{p^2}-\left(\frac{r}{p}\right)^2=\frac{rq}{p^2}\text{........}\textbf{(4-12)}$$

يمكن حساب عزوم من رتب أعلى ومن ثم ملاحظة خصائص التوزيـع الثنـائي السالب.

ملاحظة:

إن سبب تسمية التوزيع بالسالب وذلك لأنه يمكن أن يُوسع إلى:

$$p^r(1-q)^{-r}=p^r\left\{1+\binom{r}{1}q+\binom{r+1}{2}q^2+.....\right\} \qquad \text{.................(4-13)}$$

والتي تعطينا احتمالية التوزيع.

ولإيجاد دالة التوزيع الاحتمالي التجميعية للتوزيع الثنائي السالب فان:

$$F(x)=P(X\le x)=1-p(X>x)$$

وهذه تعني بان $(r-1)$ أو اقل من النجاحات في أول x من المحاولات فان:

$$F(x)=1-\sum_{j=0}^{r-1}\binom{x}{j}p^jq^{x-j}=\sum_{j=r}^{x}\binom{x}{j}p^jq^{x-j} \qquad \text{....................(4-14)}$$

وان:

$$\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}p^jq^{x-j}=(p+q)^x=1$$ لجميع قيم x.

6-4 التوزيع الهيبرجيومتري Hypergeometric Distribution

هذا التوزيع له معالم يستند عليها وهي N,n,r، كما أن دالته الاحتمالية هي كما يأتي:

$$p(x;N,n,r)=\begin{cases}\dfrac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} & ,x=0,1,2,...,n\\ 0 & ,otherwise\end{cases} \qquad \text{............(4-15)}$$

وهذا التوزيع يعالج بعض المسائل من نوع الآتي:

ليكن لدينا صندوق يحتوي N من الكرات منها n كرة لها لونٍ معين، سُحبت

منه r كرة بدون أعادة ،فما هو احتمال ظهور x بلون معين ؟ إن مثل هـذا الاحتمـال نستخدم التوزيع الهيبرجيومتري لإيجاده.

مثال 4-7

صندوق يحتوي 7 كرات منها 3 كرات بيضاء ،سُحبت من الصندوق 2 كـرة دون إعادة ، فما احتمال ظهور 2 كرة بيضاء؟

الحل

نستخدم التوزيع الهيبرجيومتري:

$$p(2;,7,3,2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{7-2}{3-1}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{7-2}{3-2}}{\binom{7}{3}}$$

$$= \frac{2\binom{5}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{30}{35}$$

ويمكن لنا حساب القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي X كمـا يـأتي ولـيس باستخدام دالة العزوم نظراً لتعقيد الحسابات الممكنة:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{x=m}^{M} x \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \sum_{x=m}^{M} x \frac{\frac{r!}{x!(r-x)!}\,\frac{(N-r)!}{(n-x)!(N-r-n+x)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

$$=\sum_{x=m}^{M} x \frac{\frac{r(r-1)!}{x(x-1)!(r-x)!}\frac{(N-r)!}{(n-x)!(N-r-n+x)!}}{\frac{N(N-1)!}{n(n-1)!(N-n)!}}$$

$$=\frac{nr}{N}\sum_{x=m}^{M} \frac{\frac{(r-1)!}{(x-1)!(r-x)!}\frac{(N-r)!}{(n-x)!(N-r-n+x)!}}{\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}$$

$$=\frac{nr}{N}\sum_{x=m-1}^{M-1} \frac{\binom{r-1}{x}\binom{N-r}{n-1-x}}{\binom{N-1}{n-1}} \quad \text{.......(4-16)}$$

نلاحظ في العلاقة $(4-15)$ اذا وضعنا $m-1=0$ فان $m=1$ أي يأخذ الصفر وعليه فان المجموع في العلاقة المذكورة يساوي واحد أي كأنه مجموع الاحتمالات للتوزيع الهيبرجيومتري الذي معالمه هي $r-1$ ، $N-1$ و $n-1$ وعليه نحصل على أن :

$$\mu=\frac{nr}{N} \quad \text{.......(4-17)}$$

وهو يمثل القيمة المتوقعة للتوزيع الهيبرجيومتري .

ولإيجاد التباين فان:

$$\sigma^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2=E\{X(X-1)\}+\mu-\mu^2$$

ولحساب :

$$E\{X(X-1)\}=\sum_{x=m}^{M} x(x-1)\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

وبنفس الأسلوب السابق وبعد إيجاد دالة التوافيق لكل حالة ومن ثم إخراج العامل المشترك نحصل على:

$$E\{X(X-1)\}=\frac{n(n-1)r(r-1)}{N(N-1)}\sum_{x=m-2}^{M}\frac{\binom{r-2}{x}\binom{N-r}{n-2-x}}{\binom{N-2}{n-2}} \quad \ldots\ldots(4\text{-}18)$$

وعندما نضع $m-2=0$ فان $m=2$ أي يأخذ الصفر والواحد وبذلك يكون المجموع في العلاقة (4-16) مساويا إلى الواحد أي أن.

$$E\{X(X-1)\}=\frac{n(n-1)r(r-1)}{N(N-1)} \quad \ldots\ldots(4\text{-}19)$$

وعليه يكون التباين:

$$\sigma^2=\frac{n(n-1)r(r-1)}{N(N-1)}+\frac{nr}{N}-\left[\frac{nr}{N}\right]^2$$

$$=\frac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)} \quad \ldots\ldots(4\text{-}20)$$

ملاحظة:

في العلاقتين $(4-16)$ و$(4-19)$ اذا وضعنا $P=\frac{r}{N}$ فإننا نحصل على:

$\mu=np$ و $\sigma^2=np(1-p)\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$ حيث نلاحظ بان القيمة المتوقعة(المتوسط) للتوزيع الهيبرجيومتري هو نفسه للتوزيع ثنائي الحدين،وهو يحدث عندما يكون هناك إعادة بعد إجراء عملية السحب لعينه معينه ،وعندما يقترب المقدار $\frac{N-n}{N-1}$ من الواحد فان التباين يقترب من تباين التوزيع الثنائي وهذا الشرط يحقق عملية التقارب بين التوزيعين .

تمارين الفصل الرابع

1. اذا كانت معلمات التوزيع الثنائي الحدين هي $p=\frac{1}{3}$ و $n=15$ اوجد x التي تجعل الاحتمال $p(X=x)$ اكبر مايمكن؟

2. اذا كان المتغير العشوائي x يتبع توزيع بواسون وكان $p(X=0)=0.4$، احسب $p(X>2)$ ؟

3. أُلقيت قطعة نقود 100 مرة فما هي القيمة المتوقعة لعدد مرات ظهور الوجه صورة القطعة ،ثم احسب التباين والانحراف المعياري لها؟

4. اذا كان متوسط عدد الزبائن الذين يدخلون محلاً تجارياً هو 3 زبائن في الدقيقة الواحدة، اوجد احتمال إن 4 زبائن بالضبط سيدخلون المحل خلال دقيقة معينة؟

5. اذا كان متوسط عدد العيوب في شريحة زجاجية كبيرة هو $\frac{1}{20}$ قدم مربع ،فما احتمال إن شريحة 10×3 قدم:
   a) لا تحتوي على عيوب؟
   b) تحتوي على عيب واحد على الأقل؟

6. صندوق بداخلة 20 مصباحاً كهربائياً منها 5 تالفة، فإذا سحبنا 4 مصابيح بطريقة عشوائية مع الإعادة احسب احتمال :
   a) الحصول على مصباح واحد تالف؟
   b) الحصول على مصباح واحد على الأقل تالف؟

7. صندوق يحتوي 10 كرات منها 5 كرات حمراء ،سُحبت من الصندوق 3 كرة دون إعادة ، فما احتمال ظهور 2 كرة حمراء؟

8. ألقي حجر نرد 4 مرات وكانت k تمثل عدد مرات ظهور الوجه 6 في الرميات الأربعة ،اوجد التوزيع الاحتمالي إلى k ؟

9. أوجد قيم المعلمات n وp للتوزيع ثنائي الحدين الذي وسطه 9 وتباينه $\frac{18}{5}$؟

10. اذا كان متوسط حوادث العمل في مصنع ما هو 4 حوادث شهرياً فما احتمال:

a) أن لايقع أي حادث في شهر معين ؟

b) أن يقع ثلاث حوادث على الأقل في شهر معين؟

11. كيس يحتوي على 9 كرات سوداء و 4 كرات بيضاء سُحبت من الكيس كرة واحدة مع الإعادة والمطلوب:

a) اذا كان x يمثل عدد مرات سحب كرة سوداء .أوجد القيمة المتوقعة والتباين ثم أوجد دالة التوزيع التجميعية للمتغير العشوائي X ؟

b) احتمال ظهور كرة سوداء في أول سحب من السحبة الرابعة؟



الفصل الخامس

المتغيرات العشوائية المستمرة والتوزيعات الاحتمالية



الفصل الخامس

المتغيرات العشوائية المستمرة والتوزيعات الاحتمالية

RANDOM VARIABLES AND CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTIONS

5-1 مقدمة

المتغير العشوائي المستمر، هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر، ويقع في المدى (a,b)، أي أن: $\{X = x : a < x < b\}$ ، فإن للمتغير X عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى (a,b) ، ومن الأمثلة على المتغيرات الكمية المستمرة ما يأتي:

1. كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر: $\{X = x : 10 < x < 40\}$
2. المساحة المزروعة بالأعلاف في اليمن بالألف هكتار $\{X = x : 1000 < x < 15000\}$
3. فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالأيام، $\{X = x : 1 < x < 5\}$
4. وزن الجسم بالكيلوجرام للأعمار من $(30-40)$ ، $\{X = x : 55 < x < 80\}$

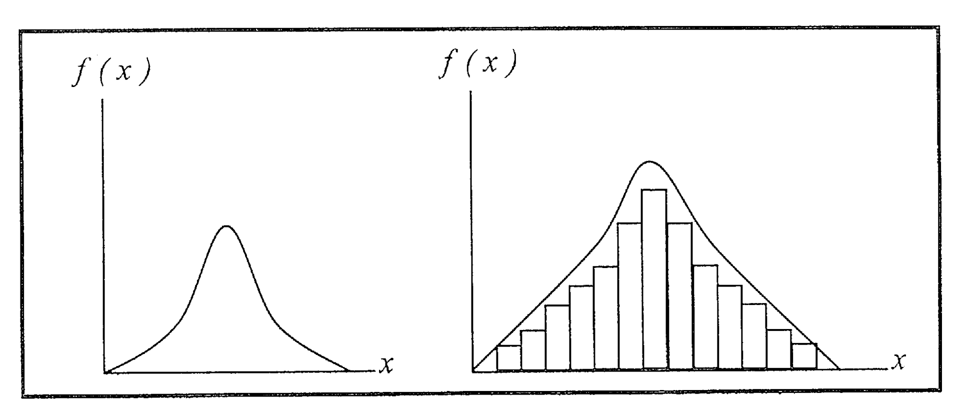
وهكذا الأمثلة على المتغير الكمي المستمر كثيرة.[2]

5-2 التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر

Probability Distribution to Continuous R.V

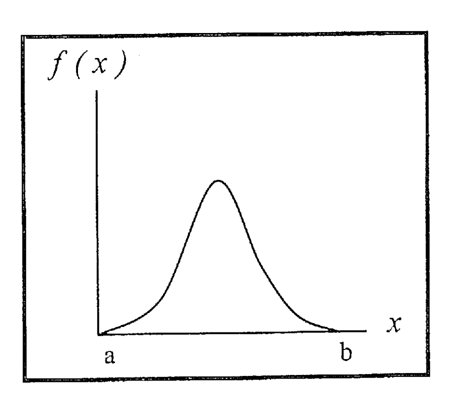
عند تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر في شكل مدرج تكراري نسبي، نجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحني التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر، وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات، يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر، كما هو مبين بالشكل

(5-1) الآتي:



شكل(5-1) منحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر

والمساحة أسفل المنحنى تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، ولذا تساوي هذه المساحة الواحد الصحيح، وتسمى الدالة $f(x)$ بدالة كثافة الاحتمال (Probability Density Function$(p.d.f)$)، وبفرض المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى: $X=\{x:a \prec x \prec b\}$، وأن منحنى هذه الدالة يأخذ الصورة التالية:



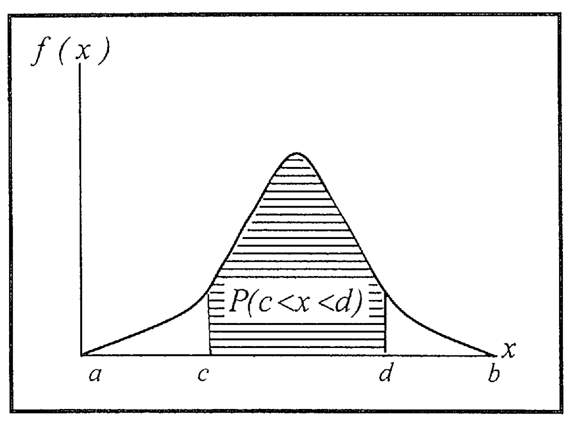
فإن من خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ما يلي:

1. الدالة $f(x)$ موجبة داخل المدى (a,b) أي أن: $f(x)\geq 0$، $x\in(a,b)$.
2. التكامل على حدود المتغير من الحد الأدنى a حتى الحد الأعلى b يعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، لذا يساوي الواحد الصحيح، أي أن:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = 1$$

حيث أن الشكل الرياضي أعلاه يسمى بالتكامل المحدد من $x=a$ حتى $x=b$ ، وهذا يعني إيجاد المساحة أسفل المنحني بين (a,b) .

3. لحساب احتمال أن المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى (d,c) أي لحساب الاحتمال $p(c<x<d)$ ، يجب حساب المساحة أسفل المنحني من $x=c$ حتى $x=d$ كما هي مبينة في الشكل البياني التالي:



ويتم ذلك بإيجاد التكامل المحدد في هذا المدى، كما يأتي:

$$P(c<x<d) = \int_{c}^{d} f(x)dx = [g(x)]_{c}^{d} = g(d) - g(c)$$

ولكي يمكننا حساب الاحتمالات، نقدم بعض قواعد التكامل المهمة التالية:

جدول يوضح بعض قواعد التكامل:

(1)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ and $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$	integration
(2)	$\int e^x dx = e^x$ and $\int e^{(a+bx)} dx = \frac{1}{b} e^{(a+bx)}$	
(3)	$\int \frac{1}{x} dx = \log_e(x)$ and $\int \frac{1}{(a+bx)} dx = \frac{1}{b} \log_{e(a+bx)}$	
(4)	$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! = n(n-1)(n-2)...3\times 2\times 1$	gamma
(5)	$I\Gamma(n+1) = \int_0^a x^n e^{-x} dx = n!\left(1 - e^{-a}\sum_{i=0}^{n}\frac{a^i}{i!}\right)$	Incomplete gamma
(6)	$B(m+1,n+1) = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$	Beta

مثال 5-1

اذا كان لدينا الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < 1 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

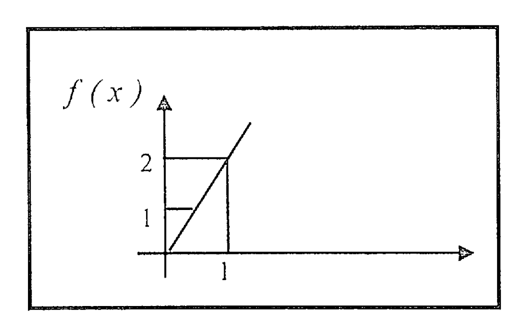
اثبت بأنها دالة كثافة احتمالية؟

الحل

نلاحظ بان الدالة $f(x) \geq 0$ لجميع القيم في الفترة $0 < x < 1$ وهذا يحقق الشرط الأول.

أما الشرط الثاني فان:

$$\int_{R_x} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2xdx = 2\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = 1^2 - 0 = 1$$ وهذا يعني بان الشرط الثاني متحقق،وعليه فان $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية.ويمكن رسم بيانها كما يلي:



مثال5-2

إذا كان الإنفاق الشهري للأسرة بالألف ريال على المواد الغذائية لـه دالـة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx(10-x) & , 0 < x < 10 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

والمطلوب:

1. حساب قيمة الثابت c
2. احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين $(8,5)$ ألف ريـال خـلال الشهر.
3. إذا كان لدينا 600 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عـن 3 آلاف خلال الشهر؟

الحل

1. حساب قيمة c

من خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = 1$$

فان:

$$\int_{x=0}^{x=10} cx(10-x)\,dx = c\int_{x=0}^{x=10}(10x-x^2)\,dx = c\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$= c\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = c\left[(5(100)-\frac{(1000)}{3})\right]-0$$

$$= \frac{500}{3}c = 1$$

$$c = 3/500 = 0.006$$

2. حساب إنفاق الأسرة يتراوح بين $(8,5)$ ألف ريال خلال الشهر هو.

$$p(5<x<8) = \int_{x=5}^{x=8} 0.006x(10-x)\,dx = 0.006\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$= 0.006\left[\left(5(8)^2-\frac{8^3}{3}\right)-\left(5(5)^2-\frac{5^3}{3}\right)\right] = 0.006\left[(149.3333)-(83.3333)\right]$$

$$= 0.006(66) = 0.396$$

إذا كان لدينا 600 أسرة، فإن عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 آلاف خلال الشهر هو:

$$number\ of\ family = 600\ p(x<3)$$

$$= 600\int_0^3 0.006x(10-x)dx$$

$$= 3.6\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3.6\left[45-9\right]-0 = 129.6 \approx 130$$

حوالي 130 أسرة.

ملاحظة:

اذا كانت $f(x)$ هي دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X فيمكن حساب الاحتمالات التالية:

$$p(x \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$p(x \ge a) = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

$$p(a \le x \le b) = \int_{b}^{a} f(x)dx$$

وعليه فان منطقة التعريف بشكلٍ عام هي $R_x(-\infty < x < +\infty)$.

مثال5-3

اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X هي:

$$f(x) = \begin{cases} 4x, 0 < x < 1 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

احسب $P(x \ge 0.5)$ ، $p(x < 0.5)$ ، $p(0.3 \le x \le 0.5)$ ؟

الحل

$$p(x \ge 0.5) = \int_{0.5}^{1} 4xdx = 4\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0.5}^{1} = 2(1)^2 - 2(0.5)^2 = 2 - 0.5 = 1.5$$

$$p(x < 0.5) = \int_{0}^{0.5} 4xdx = 4\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{0.5} = 2(0.5)^2 - 0 = 0.5 - 0 = 0.5$$

$$p(0.3 < x < 0.5) = \int_{0.3}^{0.5} 4xdx = 4\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0.3}^{0.5} = 2(0.5)^2 - 2(0.3)^2$$

$$= 0.5 - 0.18 = 0.32$$

3-5 المتوسط والتباين في التوزيع الاحتمالي المستمر

إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي x ، $a < x < b$ فإن التوقع الرياضي للدالة $h(x)$ تأخذ الصورة الآتية:[4]

$$E(h(x)) = \int_{a}^{b} h(x) f(x)dx$$

ومن ثم يمكن كتابة معادلة الوسط والتباين كما يأتي.

$$\mu = E(x) = \int_a^b x f(x)\,dx \quad \text{.........(5-1)}$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2 \quad , E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx \quad \text{.........(5-2)}$$

في المثال (5-2) أوجد المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف النسبي للإنفاق الشهري؟.

الحل

1. المتوسط الحسابي

$$\mu = E(x) = xf(x)dx = \int_0^{10} x\left(0.006x(10-x)\right) = 0.006\int_0^{10}(10x^2 - x^3)dx$$

$$= 0.006\left[10\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0.006\left[\left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{4}\right) - (0)\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

متوسط إنفاق الأسرة الشهري 5آلاف ريال.

2. الانحراف المعياري

$$\sigma^2 = E(x^2) - u^2 = E(x^2) - (5)^2$$

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)\ dx = 0.006\int_0^{10}(10x^3 - x^4)dx$$

$$= 0.006\left[10\left(\frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^{10} = 0.006\left[\frac{100000}{4} - \frac{100000}{5}\right] - 0$$

$$= 600\left(\frac{1}{20}\right) = 30$$

إذن التباين هو: $\sigma^2 = 30 - 25 = 5$، ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري القيمة الآتية:

$$\sigma = \sqrt{variance} = \sqrt{5} = 2.236$$

3. معامل الاختلاف النسبي

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{2.236}{5} \times 100 = 44.72\%$$

5-3-1 الدالة المولدة للعزوم

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً،نُعرف الدالة المولدة للعـزم ،اذا وجـدت بالنسبة إلى $-h < t < h$ عندما h عدداً موجباًكما يأتي:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx \quad \text{.........................(5-3)}$$

ويمكن إيجاد مشتقة الدالة المولدة للعزوم بنفس الأسلوب الذي وجـدناها به في حالة المتغيرات المتقطعة.

مثال5-4

ليكن X متغير عشوائي مستمر له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, 0 \le x < \infty \\ 0, otherwise \end{cases}$$

اوجد الدالة المولدة للعزم ثم اوجد متوسط وتباين التوزيع؟

الحل

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{0}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} e^{tx}(xe^{-x})dx$$

وبعد التبسيط وإجراء التكامل المحدد نحصل على:

$$M_x(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

كذلك يمكن إيجاد المشتقة الأولى والثانية لدالة العزم وكمايلي:

$M'_x(t)=\frac{2}{(1-t)^3}$ و $M''_x(t)=\frac{6}{(1-t)^4}$ وبوضـــع $t=0$ فاننـــا نحـــصل على:

$\mu=M'_x(0)=2$ و $M''_x(0)=6$ وعليه يكون:

$$\sigma^2=M''_x(0)-\{M'_x(0)\}=6-(2)^2=2$$

وهو يمثل تباين التوزيع للمتغير العشوائي X. [2]

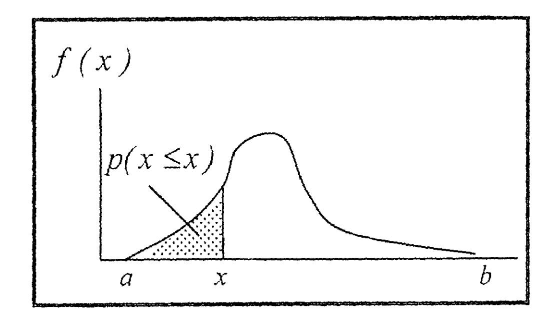
5-3-2 دالة التوزيع التجميعي

Cumulative Distribution Function(c.d.f)

يرمز لهذه الدالـة بـالرمز $(C.D.F)=F(x)$وتـسمى دالـة التوزيـع للمـتغير العشوائي المستمر X وتحسب بإيجاد الاحتمال:

$$C.D.F=F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt \quad \text{.....................(5-4)}$$

ويمكن توضيحها بيانيا بالرسم التالي:



5-3-3 خواص دالة التوزيع التجميعية

من خواص هذه الدالة:

a) $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$ ، $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ حيث أن: $R_x(-\infty<x<\infty)$.

b) الدالـة $F(x)$ دالـة متزايـدة بالنـسبة للمـتغير x. أي أن لكـل $x_1<x_2$ فـان $F(x_1)\leq F(x_2)$.

c) اذا كان $x_1<x_2$ فان $p(x_1<x\leq x_2)=F(x_2)-F(x_1)$.

d) إن دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر X هي دالة مستمرة لان $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$.

e) اذا كانت $F(x)$ هي دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر X فان: $P(X > x) = 1 - p(X \leq x) = 1 - F(x)$.

في المثال (5-2) أوجد دالة التوزيع التجميعي c.d.f، ثم استخدم هذه الدالة لحساب احتمال أن إنفاق الأسرة يقل عن 5 آلاف جنيه.

الحل

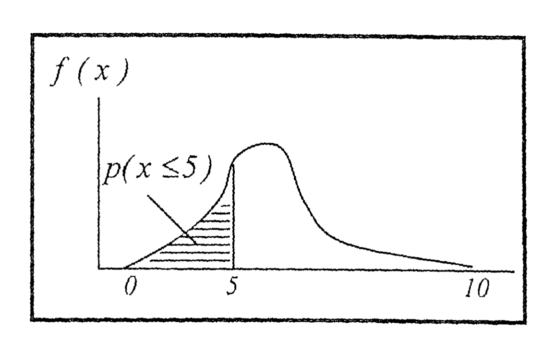
- إيجاد دالة التوزيع التجميعي:

$$F(x) = \int_0^x f(x)\, dx$$

$$= \int_0^x 0.006\, x\,(10 - x)dx = 0.006\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^x$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]$$

- حساب الاحتمال المطلوب $F(5) = p(x \leq 5)$ ، كما هو مبين بالرسم الآتي:



ويمكن حساب هذا الاحتمال بالتعويض عن $x = 5$ في الدالة $F(x)$ التي تم التوصل إليها، أي أن:

$$F(5)=P(x\le 5)=$$
$$=0.006\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]=0.006\left[125-\frac{125}{3}\right]$$
$$=0.006\left(\frac{250}{3}\right)=0.5$$

أي أن %50 من الأسر يقل إنفاقها عن 5 آلاف ريال.

مثال5-5

اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}(x+3) & ,1<x<3\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

أوجد:

a) دالة التوزيع التجميعية للمتغير X ؟

b) $p(1.3<x<2)$ ، $p(x>2.5)$ ، $p(x\le 1.5)$ ؟

الحل

لحساب دالة التوزيع فان:

$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{10}(t+3)dt=\frac{1}{10}\left(\frac{t^2}{2}+3t\right)\Big]_1^x$$
$$=\frac{1}{10}\left[\left(3x+\frac{x^2}{2}\right)-\left(3+\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{20}\left[x^2+6x-7\right]$$

وعليه يمكن كتابة دالة التوزيع بالشكل الآتي:

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 1\\ \frac{1}{20}(x^2+6x-7) & ,1<x<3\\ 1 & ,x\ge 3\end{cases}$$

ولحساب الاحتمال التالي فان:

$$p(1.3<x<2)=F(2)-F(1.3)=\frac{9}{20}=0.3255$$

$$P(x>2.5)=1-p(x\le 2.5)=1-F(2.5)=1-\frac{14.25}{20}=0.2875$$

أما الاحتمال الأخير فهو:

$$P(x\le 1.5)=F(1.5)=\frac{1}{20}\left[(1.5)^2+6(1.5)-7\right]=0.2125$$

4-5 الاحتمالات المشروطة ودوال التوزيع لها:

لتكن $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X وليكن A حدثٍ ما وان $P(A)\neq 0$، فان دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة تُعرف كما يأتي:

$$f(x/A)=\frac{f(x)}{p(A)} \quad \ldots\ldots\ldots (5-5)$$

وان دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر هي:

$$F(x/A)=\frac{P\left[(X\le x)\cap A\right]}{P(A)} \quad \ldots\ldots\ldots (5-6)$$

ملاحظة:

- من العلاقتين $(5-5)$ و $(5-6)$ فأنة يمكن الحصول على:

$$f(x/A)=\frac{d}{dx}F(x/A) \quad \ldots\ldots\ldots (5-7)$$

- خواص الدالة $F(x)$ تنطبق على دالة التوزيع المشروطة أي أن:

$$\lim_{x\to-\infty}F(x/A)=0 \quad , \lim_{x\to+\infty}F(x/A)=1$$

$$F(x_2/A)-F(x_1/A)=P\left[(x_1<x<x_2)/A\right]$$
$$=\frac{P\left[(x_1<x<x_2)\cap A\right]}{P(A)}$$

• دالـة الكثافـة الاحتماليـة $f(x/A)$ تحمـل نفس خـواص دالـة الكثافـة الاحتمالية $f(x)$ وعليه فان:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/A)dx=F(+\infty,a)-F(-\infty,a)=1$$

حيث إن $-\infty$ و $+\infty$ هما الحد الأدنى والأعلى لمنطقة التعريف.

مثال5-6

اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{12}x & ,1<x<5\\ 0,otherwise\end{cases}$$

اوجد:

a) دالة التوزيع الشرطية $F(x/X>3)$ ؟

b) دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية $f(x/X>3)$ ؟

الحل

دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر X هي:

$$F(x)=\int_1^x\frac{1}{12}tdt=\frac{1}{12}\frac{t^2}{2}\Big]_1^x=\frac{1}{24}(x^2-1)$$

وعليه تكون دالة التوزيع الشرطية هي:

$$F(x/X>3)=\frac{p(X\le x)\cap(X>3)}{P(X>3)}$$

$$=\frac{P(3<X\le x)}{p(X>3)}=\frac{F(x)-F(3)}{1-F(3)}$$

$$=\frac{3F(x)-1}{2}=\frac{x^2-9}{16}$$

أما اذا كانت $x\le 3$ فان:

$$F(x/X>3)=\frac{p(X\le x)\cap(X>3)}{P(X>3)}=0$$

ولحساب دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية فان:

$$f(x/X>3)=\frac{d}{dx}F(x/X>3)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{x^2-9}{16}\right\}$$

$$f(x/X>3)=\begin{cases}\frac{1}{8}x & ,3<x<5\\ 0,otherwise\end{cases}$$

5-5 التحويل في المتغيرات العشوائية المستمرة

لتكن دالة التوزيع التجميعية للمتغير العشوائي X هي $F_x(x)$ ودالة الكثافة الاحتمالية له هي $f_x(x)$.

ولتكن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y هي $y_i=g(x_i)$ حيث يمكن أن نعبر عنها بالشكل الآتي:

$$P(Y\le y_i)=P(X\le x_i)\;\;\;\;\;\;\textbf{(5-8)}$$

وعلية يكون:

$$F_y(y)=F_x(x)\;\;\;\;\;\;\textbf{(5-9)}$$

وبما أن $y=g(x)$ فان الدالة العكسية له هي:

$$x=g^{-1}(y)\;\;\;\;\;\;\textbf{(5-10)}$$

ولكون المتغير العشوائي X مستمراً فان المتغير العشوائي Y مستمراً أيضا.

وبأخذ المشتقة بالنسبة إلى y للعلاقة $(5-9)$ فنحصل على:

$\frac{dF_y(y)}{dy} = \frac{dF_x(x)}{dx}\frac{dx}{dy}$ وعليه يكون: $f_y(y) = f_x(x)\frac{dx}{dy}$

وحسب العلاقة $(5-10)$ فان:

$$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y))\frac{d(g^{-1}(y))}{dy} \quad \text{..........................(5-11)}$$

وهذه تمثل دالة التحويل.

مثال5-7

اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X وكما في المثال (5-3) هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(x+3) & ,1 < x < 3 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

وكان المتغير العشوائي Y معرف كما يلي: $Y = g(x) = 5x + 3$.

اوجد دالة التوزيع التجميعية ودالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Y ؟

الحل

سبق وان أوجدنا دالة التوزيع وهي:

$$F_x(x) = \frac{1}{20}\left[x^2 + 6x - 7\right]$$

وبما أن الدالة $Y = g(x) = 5x + 3$ دالة متزايدة فان: $x = \frac{y-3}{5}$

ومن العلاقة $(5-10)$ نحصل على:

$$f_y(y) = f_x\left(\frac{y-3}{5}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{y-3}{5}\right) = \frac{1}{10}\left[3 + \left(\frac{y-3}{5}\right)\right]\frac{1}{5}$$

وعليه فان دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Y هي:

$$f_y(y)=\begin{cases}\frac{1}{250}y+\frac{6}{125} & ,8<y<18\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

ولإيجاد دالة التوزيع للمتغير العشوائي Y فان:

$$F_y(y)=\int_8^y\left(\frac{t}{250}+\frac{6}{125}\right)dt=\frac{1}{500}y^2+\frac{6}{125}y-\frac{80}{125}$$

وعليه يمكن كتابة دالة التوزيع للمتغير المستمر Y بالشكل الآتي:

$$F_y(y)=\begin{cases}0 & ,y<8\\ \frac{1}{500}y^2+\frac{6}{125}y-\frac{80}{125} & ,8<y<18\\ 1 & ,y\geq 18\end{cases}$$

وبذلك نكون قد أوجدنا الدوال في حالة التحويل للمتغير Y. [4]

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة، ولها دوال كثافة احتمال محددة، وسوف نستعرض في الفصل السادس أهم التوزيعات الخاصة للمتغير العشوائي المستمر.

تمارين الفصل الخامس

1. هل أن الدالة التالية:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4x}{3}, 2<x<3\\ 0, otherwise\end{cases}$$ دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X ؟

2. اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X وكما في هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}(x+3) & ,1<x<3\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

وكان المتغير العشوائي Y معرف كما يلي: $Y=g(x)=-3x$.

اوجد دالة التوزيع ودالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Y ؟

3. مصنع ينتج مصابيح الكهربائية وكان X متغيراً عشوائياً يمثل عمر المصباح بالساعات وكانت دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1000}e^{\frac{x}{1000}}, x>0\\ 0, otherwise\end{cases}$$

فإذا سُحبت وحدة واحدة من هذا الإنتاج فما احتمال أن يكون عمر المصباح أكثر من 1000 ساعة؟

4. اذا كانت دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر X هي:

$$F(y)=\begin{cases}0 & ,x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & ,a\le x\le b\\ 1 & ,x\ge b\end{cases}$$ فاوجد دالة الكثافة؟

5. اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & ,0<x<1 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

اوجد قيمة b التي تحقق $p(X\le b)=2p(X>b)$ ؟

6. اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha} & ,-\alpha<x<\alpha \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

اوجد قيمة α التي تحقق $p(x<1)=\frac{3}{4}$ ؟

7. اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & ,0\le x\le 1 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

اوجد دالة التوزيع الاحتمالية الشرطية $F(x/0.2<x\le 0.7)$ ؟

الفصل السادس

التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة



الفصل السادس

التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة

SPECIAL CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTIONS

6-1 مقدمة

كما لاحظنا في الفصل الرابع ،أن هناك توزيعاتٍ خاصة للمتغيرات العشوائية المتقطعة ،فإننا سوف نستعرض في هذا الفصل بعض التوزيعات الخاصة للمتغير العشوائي المستمر،والتي لها أهمية كبيرة في التطبيقات الإحصائية التي ستدُرس في مراحلٍ متقدمة .

وسنحاول إعطاء بعض الأمثلة التوضيحية لكل توزيع ليكون الطالب على دراية في طريقة التوصل إلى بعض الاشتقاقات المهمة وليكون فكرة جيدة عن خصائص كل توزيع.

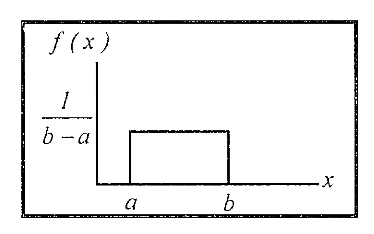
فيما يلي بعض التوزيعات للمتغير العشوائي المستمر،مع أهم الخصائص المتعلقة بكل توزيع.

6-2 التوزيع المنتظم Uniform distribution

هو توزيع له دالة احتمال ثابتة، ويستخدم في حالة الظواهر التي يمكن أن تحدث بشكل منتظم، فإذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع منتظم (Uniform)، مداه هو $a<x<b$ فإن دالة كثافة احتماله هي:[1]

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad ,a<x<b$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانياً كما يلي:



ومن معالم التوزيع فانه،توجد معلمتان لهـذا التوزيع هما (b,a) ، ولذا يكتب رمز هـذا التوزيـع بالـصورة $x \sim U(a,b)$. ويـسمى أحيانـاً بـالتوزيع المستطيل.

6-2-1 خصائص التوزيع المنتظم

الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا المتغير هما :

$$\mu = E(x) = \frac{a+b}{2} \quad , \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ويمكن إثبات ذلك من خلال حساب :

$$\mu = E(x) = \int_a^b x\ f(x)dx = \int_a^b x\left(\frac{1}{b-a}\right)dx = \frac{b+a}{2}$$

وبنفس الأسلوب يمكن حساب التباين للتوزيع المنتظم :

$$E(x^2) = \int_a^b x^2\ f(x)dx = \int_a^b x^2\left(\frac{1}{b-a}\right)dx = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

وذلك بعد إجراء التكامل وسلسلة من التبسيطات.

وعليه يكون:

$$\sigma^2 = var(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left[\frac{b+a}{2}\right]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

6-2-2 دالة التوزيع التجميعية $C.D.F$:

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_a^x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx$$

$$= \frac{x-a}{b-a}$$

مثال 6-1

استورد أحد المراكز التجارية 1500 طن بطاطس، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة. إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم، فأوجد الآتي:

a) دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع.

b) بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

نفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية للبيع مقاسه بالشهر، أي أن $0 < x < 12$، ومن ثم تأخذ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن الصورة الآتية:

$$f(x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12} \quad , \; 0 < x < 12$$

- حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع.

نفرض أن Q هي كمية البطاطس المستوردة ، تكون الكمية المتبقية بالمخزن بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع هي :

$$Q \times p(x > 7) = Q \times (1 - F(7)) = 1500(1 - \frac{7-0}{12-0}) = 625 \;\; Ton$$

6-3 التوزيع الأسي السالب

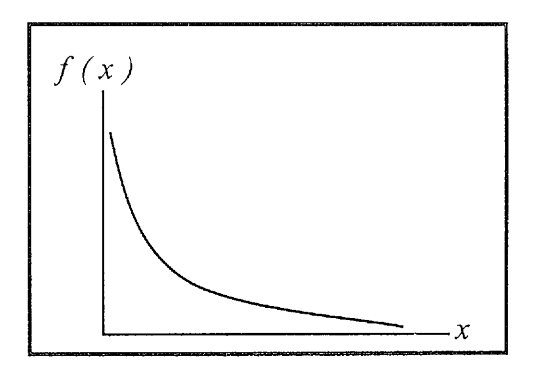
Negative Exponential distribution

إذا كان المتغير x متغيراً عشوائياً له توزيع أسي سالب ، مداه هو $0 < x < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \quad , 0 < x < \infty \quad , \theta > 0$$

وكما نلاحظ فانه توجد معلمة واحدة لهذا التوزيع هي θ.

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يأتي:



1-3-6 خصائص التوزيع الأسي السالب

الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا التوزيع هما:

$$\mu = E(x) = \frac{1}{\theta} \ , \quad \sigma^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

ولإيجاد الوسط والتباين نقوم بالحساب الآتي:

$$E(x) = \int_0^\infty x\, f(x)dx = \int_0^\infty x(\theta \ e^{-\theta x})dx$$

$$= \theta \int_0^\infty x \ e^{-\theta x} \ dx$$

وبعد إجراء التكامل أعلاه بطريقة التجزئة أي أن:

$$u = x \qquad dv = e^{-\theta x} \quad dx$$

$$du = dx \quad , v = -\frac{1}{\theta} e^{-\theta x}$$

$$\theta \int_0^\infty u dv = \theta(uv - \int_0^\infty v du) = \theta\left[x(-\frac{1}{\theta} e^{-\theta x}) \ \Big|_0^\infty + \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{-\theta x} \ dx \right]$$

وبعد إجراء سلسلة التبسيط نحصل على:

$$E(x) = \theta\left[\frac{1}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta}$$

وبنفس الأسلوب نبرهن على تباين التوزيع الأسي من خلال:

$$E(x^2)=\int_0^\infty x^2 f(x)dx=\int_0^\infty x^2(\theta\ e^{-\theta x})dx$$

وباستخدام نفس طريقة التكامل السابقة نحصل على:

$$E(x^2)=\frac{2}{\theta^2}$$

وباستخدام العلاقة الآتية:

$$\sigma^2=var(x)=E(x^2)-\{E(x)\}^2=\frac{2}{\theta^2}-\{\frac{1}{\theta}\}^2=\frac{1}{\theta^2}$$

نكون قد برهنا على تباين التوزيع الآسي.

2-3-6 دالة التوزيع التجميعية $C.D.F$

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي:

$$F(x)=p(X\le x)=\int_0^x f(x)dx=\left(1-e^{-\theta x}\right)$$

مثال 6-2

إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل في البنك تتبع توزيع أسي بمتوسط 2 دقيقة، فأوجد ما يأتي:

a) دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل.

b) ما احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

الحل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

نفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة، أي أن $0<x<\infty$ ، فإن المتوسط $1/\theta=2$ ، ومن ثم تصبح قيمة (θ) هي: $(\theta=0.5)$ ، وتكتب دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن على الصورة الآتية:

$$f(x)=0.5\ e^{-0.5\ x}\ ,\ 0<x<\infty$$

- حساب احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

$$p(x \le 1) = (1 - e^{-0.5x}) = (1 - e^{-0.5(1)}) = 0.3935$$

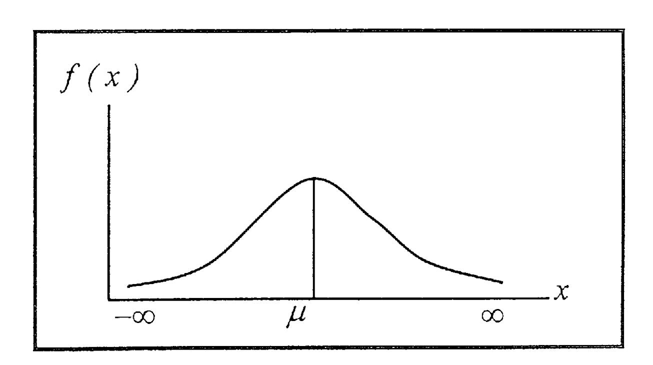
4-6 التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

يعتبر هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداماً في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي وموضوع التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع، وفيما يأتي عرض لهذا التوزيع.

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع طبيعي ، مداه هو $-\infty < x < \infty$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية له هي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad , -\infty < x < \infty \ , \pi = \frac{22}{7}$$

وهذا التوزيع له منحنى متماثل يأخذ الصورة الآتية:



وهو متماثل على جانبي الوسط الحسابي μ.

وتوجد معلمتين لهذا التوزيع هما الوسط الحسابي $E(x) = \mu$ والتباين $var(x) = \sigma^2$،ومن ثم يعبر عن التوزيع للمتغير x بالرموز $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ ، وتباين σ^2 .

6-4-1 خصائص التوزيع الطبيعي

هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداماً، بل يُشتق منه كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى المستخدمة في الاستدلال الإحصائي، ومن خصائص هذا التوزيع ما يأتي:[2]

1. الوسط الحسابي μ.
2. التباين σ^2.
3. منحني هذا التوزيع متماثل على جانبي الوسط μ.
4. يمكن البرهنة على أن:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}dx = 1$$ وذلك كما يلي:

نفرض أن: $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ومنه نحصل على:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

نفرض أن التكامل أعلاه يساوي A .ومنه يكون :

$$A^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y^2+z^2)}{2}}dydz$$

ويُحل هذا التكامل باستخدام التكاملات القطبية:

$$A^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdrd\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

ومنه نستنتج بان $A = 1$.إي إن التكامل يساوي واحد.

ولإيجاد الوسط الحسابي μ للتوزيع الطبيعي نتبع الخطوات الآتية :

$$M_x(t)=E(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}dx$$

نفرض أن $y=\frac{x-\mu}{\sigma}$ ومنه نحصل على $dx=\sigma\ dy$ وبتعويض هذه العلاقة بالمعادلة أعلاه نحصل على:

$$M_x(t)=E(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t(\sigma y+\mu)}e^{-\frac{1}{2}(y)^2}\sigma dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t(\sigma y+\mu)}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\sigma ty}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{2\sigma ty-y^2}{2}}dy$$

وبإضافة σ^2t^2 وطرح نفس المقدار ضمن العلاقة أعلاه نحصل على:

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{+\sigma^2t^2-\sigma^2t^2+2\sigma ty-y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu t}e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-(\sigma^2t^2-2\sigma t+y^2)}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{2\mu t+\sigma^2t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-(y-\sigma t)^2}{2}}dy$$

وبما أن $\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-(y-\sigma t)^2}{2}}dy=\sqrt{2\pi}$

وبالتعويض عنها في العلاقة أعلاه نحصل على :

$$M_X(t)=e^{\frac{2\mu t+\sigma^2t^2}{2}}$$

وهي تمثل دالة العزم (Moment Function) وبإيجاد المشتقة لهذه الدالة عندما $t=0$ نحصل على:

$$M'_x(t)=(\mu+\sigma^2 t)e^{\frac{2\mu t+\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$M'_x(0)=[(\mu+\sigma^2(0)]e^0=\mu$$

وبذلك نكون قد برهنا على أن الوسط للتوزيع هو μ.

وبإيجاد المشتقة الثانية للدالة نحصل على العزم الثاني وكما يأتي:

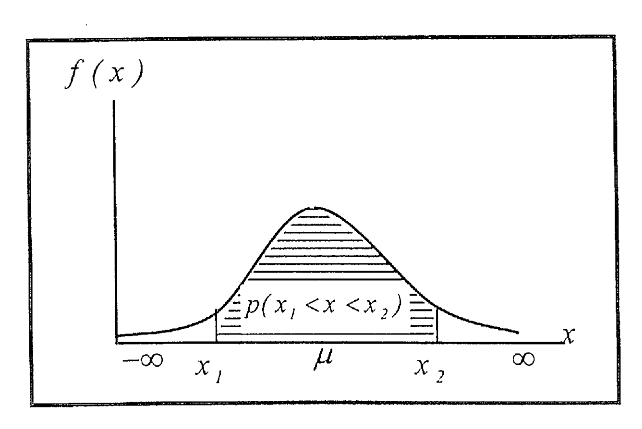
$$M''_X(t)=(\mu+\sigma^2 t)(\mu+\sigma^2 t)e^{\frac{2\mu t+\sigma^2 t^2}{2}}+\sigma^2 e^{\frac{2\mu t+\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$M''_x(0)=(\mu+0)(\mu+0)e^0+\sigma^2 e^0=\mu^2+\sigma^2$$

ومن العلاقة التالية نحصل على التباين للتوزيع وكما يأتي:

$$var(x)=M''_x(0)-\{M'_x(0)\}^2=\mu^2+\sigma^2-\{\mu\}^2=\sigma^2$$

ولحساب الاحتمالات من النوع $p(x_1<X<x_2)$ نفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(x_1<X<x_2)$، وهذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



وحيث أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة(الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل الآتي:

$$p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيون إلى عمل تحويلة رياضية (Transform)، يمكن استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة هي:

$$z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

ويعرف المتغير الجديد z بالمتغير الطبيعي القياسي (Standard (Normal Variable، وهذا المتغير له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة الآتية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad , -\infty < z < \infty \quad , \pi = \frac{22}{7}$$

ومن خصائص هذا التوزيع ما يأتي:

1. متوسطه هو: $E(z) = 0$
2. تباينه هو: $var(z) = 1$

ولإثبات الخاصية (1):

$$E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} zf(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} z(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2})dz = -2e^{-\frac{1}{2}z^2}]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

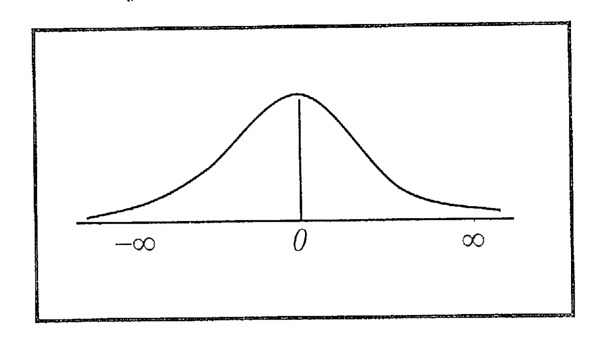
وبنفس الأسلوب يمكن إثبات الخاصية (2):

$E(z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2})dz = 1$ وهنا نحتاج إلى بعض المعلومات عن التكامل بالتجزئة لغرض إكمال البرهان،ومنه نحصل على:

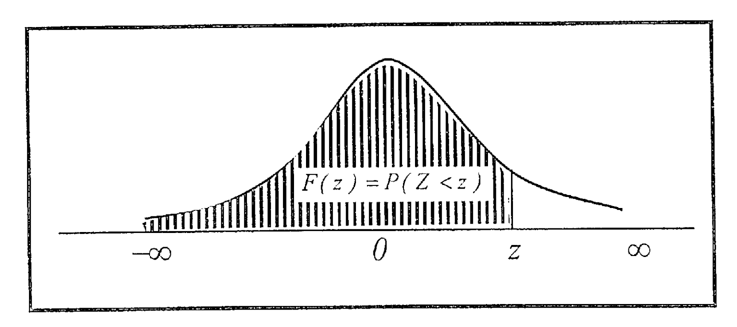
$$\sigma^2 = var(z) = E(z^2) - \{E(z)\}^2 = 1 - \{0\}^2 = 1$$

ومن ثم يُعَبر عن توزيع المتغير z بالرموز : $z \sim N(0,1)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط (0)، وتباين (1)

3. يأخذ المنحنى الشكل الناقوس المتماثل على جانبي الصفر:



وصَمم الأحصائيون جداول إحصائية لحساب دالـة التوزيـع التجميعيـة: $F(z) = P(Z < z)$، كما هو مبين بالرسم الآتي:

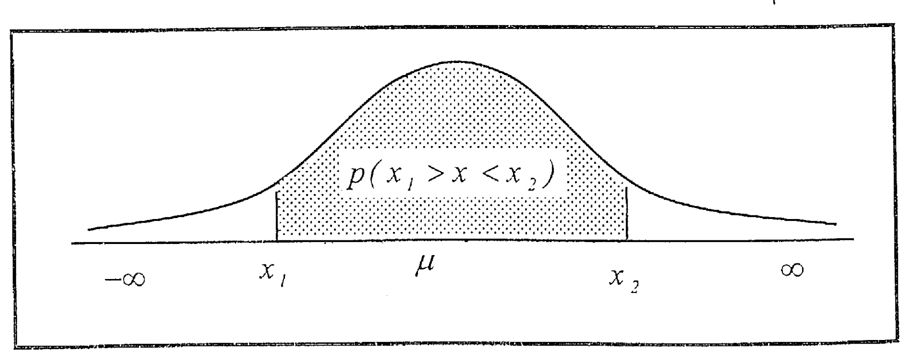


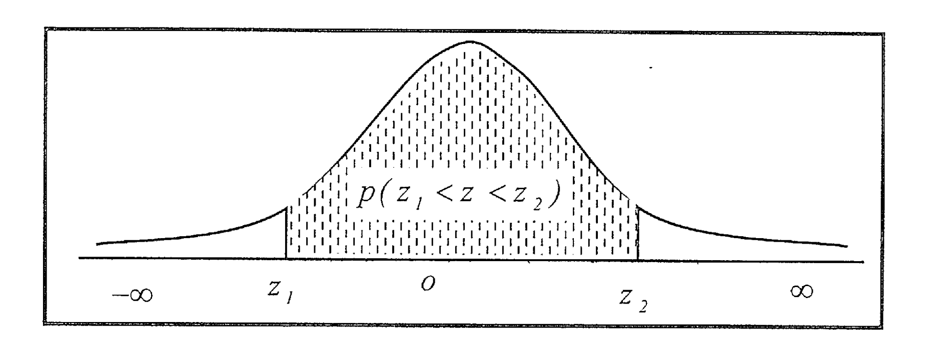
ونعود الآن إلى خطوات حساب الاحتمـال $p(x_1 < X < x_2)$ باسـتخدام التحويلة $z = (x - \mu)/\sigma$:

1. يتم تحويل القيم الطبيعية (x_1, x_2) إلى قيم طبيعية قياسية:

$z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$, $z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$.

2. ومن ثم يكون الاحتمال: $p(x_1 < X < x_2) = p(z_1 < Z < z_2)$:





3. تستخدم جداول التوزيع الطبيعي القياسي، والذي يعطي المساحة الخاصة بالاحتمال $F(z) = P(Z < z)$

4. طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في حساب الاحتمالات:

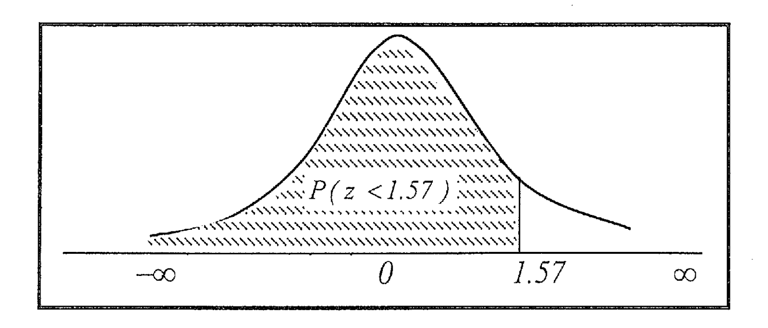
مثال 6-3

أوجد الاحتمالات الآتية:

$P(z < 1.57)$ ، $P(z < -2.33)$ ، $P(z > 1.96)$ ، $P(-2.01 < z < 1.28)$

الحل

- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z < 1.57) = F(1.57)$ أسفل المنحنى كما يأتي :



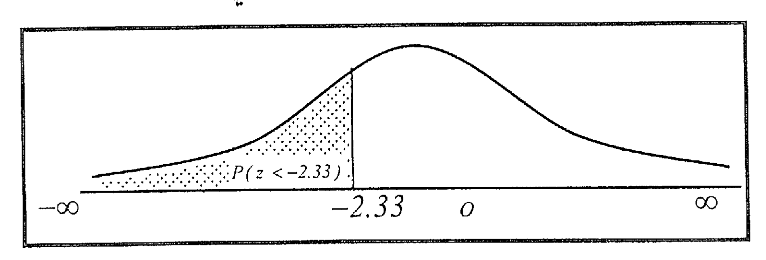
ويتم استخدام الجدول كما هو مبين :

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮										
1.00										
1.10										
1.20										
1.30										
1.40										
1.50								0.9418		
⋮										

ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(z < 1.57) = F(1.57) = 0.9418$

٥ المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال:

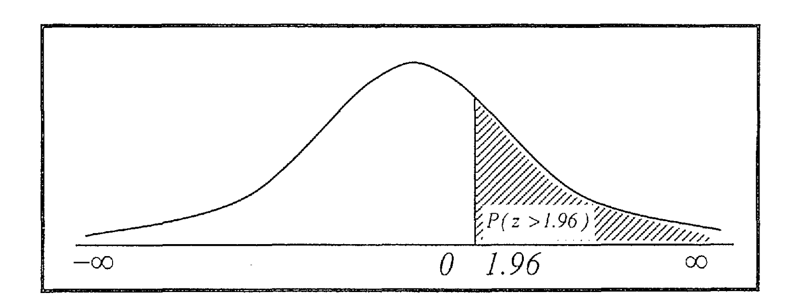
$P(z<-2.33)$: موضحة كالآتي $P(z < -2.33) = F(-2.33)$



z	.00	.01	.02	.033	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.										
.										
.										
.										
-2.70										
-2.60										
-2.50										
-2.40										
-2.30				0.0099						

ومن ثم يكون : $P(z<-2.33)=0.0099$.

- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z>1.96)$ كالتالي:



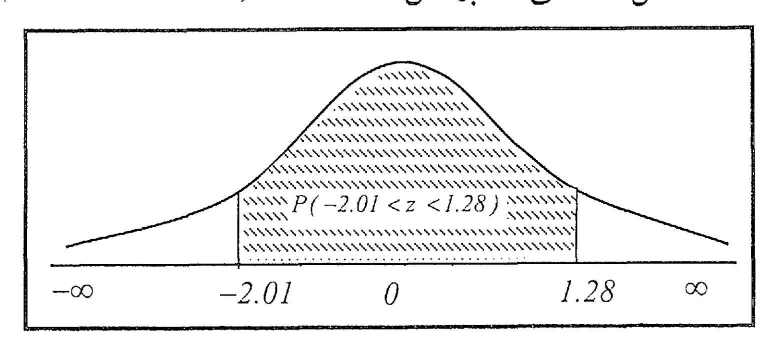
وهذا الاحتمال يحسب باستخدام خصائص دالـة التوزيـع التجميعـي ، حيث أن :

$$P(z>1.96)=1-p(z<1.96)=1-F(1.96)$$

وبالكشف في الجدول بنفس الطريقة السابقة على القيمة 1.96 نجد أن: $p(z<1.96)=0.9750$ ، ومـن ثـم يكـون الاحتمـال المطلـوب هـو:

$$P(z>1.96)=1-0.9750=0.0250$$

- المساحة أسفل المنحنى المعبر عن الاحتمال $P(-2.01<z<1.28)$ هو:



وباستخدام خصائص دالة التوزيع التجميعية أيضاً يمكـن حـساب هـذا الاحتمال ، حيث إن :

$$P(-2.01<z<1.28)=F(1.28)-F(-2.01)$$

وبالكشف في الجدول عن هاتين القيمتين ، نجد أن:

$P(-2.01 < z < 1.28) = 0.8997 - 0.0222 = 0.8775$

سوف نعطي جداول التوزيع الطبيعي في نهاية الكتاب مع الملاحق المرفقة.

مثال 6-4

إذا كان الدخل السنوي للأسرة في أحد مناطق المملكة يتبع توزيع طبيعي متوسطه 80 ألف ريال، وتباينه 900. والمطلوب:

1. كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.
2. كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.
3. ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن60 ألف ريال ؟
4. ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول؟

الحل

1. كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

نفرض أن x متغير عشوائي يعبر عن الدخل السنوي بالألف ريال، وهو يتبع التوزيع الطبيعي، ومعالمه هي:

المتوسط $E(x) = \mu = 80$

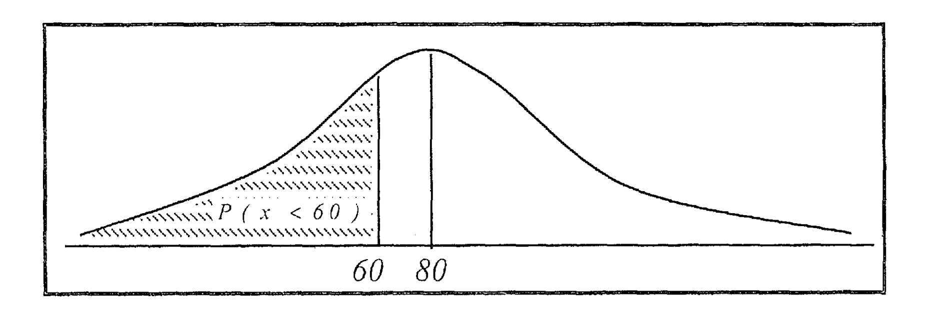
التباين هو: $Var(x) = \sigma^2 = 900$

أي أن : $x \sim N(80, 900)$

2. شكل دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2} , \quad -\infty < x < \infty , \quad \pi = 22/7$$

3. نسبة الأسر التي يقل دخلها عن60 ألف ريال هي: $P(x \prec 60)$ وكما موضحة بالرسم التالي:



ويتبع الخطوات المذكورة سابقا في حساب الاحتمال كما يأتي:

$$P(x < 60) = p\left(z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(z < \frac{60-80}{30}\right) = P(z < -0.67) = F(-0.67)$$

وبالكشف مباشرة عن هذه القيمة في جدول التوزيع الطبيعي القياسي ، نجد أن :

$$P(x < 60) = P(z < -0.67) = 0.2514$$

4. الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول: في هذه الحالة يبحث عن قيمة المتغير (x) الذي أقل منه 0.975 ، بفرض أن هذا المتغير هو (x_1) ، فإن :

$$P(x < x_1) = p\left(z < \frac{x_1-80}{30}\right) = 0.975$$

بالكشف بطريقة عكسية ، حيث نبحث عن المساحة 0.9750 نجدها تقع عند تقاطع الصف 1.9 ، والعمود $.06$. أي أن قيمة $z = 1.96$ ، ويكون :

$$1.96 = \frac{x_1-80}{30} \text{ , Then } x_1 = 30(1.96) + 80 = 138.8$$

إذا الدخل هو 138.8 ألف ريال في السنة.

5-6 توزيع كاما The Gamma Distribution

إذا افترضنا بأننا نهتم بوقت الانتظار من أول حدث حتى r من الأحداث ، فان دالة التوزيع الاحتمالية $(c.d.f)$ للمتغير العشوائي x عندما $x \succ 0$ تعطى بالشكل الآتي :[2]

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$$

$$= 1 - P\{(r-1)\}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\lambda x} (\lambda x)^k \Big/ k!$$

وهذه العلاقة وحسب توزيع بوسون عندما $x \leq 0$ فان:

$$F(x) = 1 - 1 = 0$$

ملاحظة:

سبق وان لاحظنا في توزيع بوسون المتقطع بان فترة الوقت بين حصول أول حدث والذي بعده لها توزيع أسي .

وباشتقاق العلاقة أعلاه نلاحظ أن :

$$f(x) = \frac{d}{dx}\{1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!}\}$$

$$f(x) = \lambda \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} - \lambda \sum_{k=1}^{r-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!}$$

ومنه نحصل على :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

هذا التوزيع هو حالة خاصة من عائلة توزيعات كاما .وله معلمتان هما λ و r (حيث أن r يجب أن يكون عدداً صحيحاً) .

6-5-1 تعريف دالة كاما:

تعرف دالة كاما بالشكل الآتي :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \qquad , n > 0$$

ولإيجاد دالة كاما فإننا نستخدم التكامل بالتجزئة وكما يأتي:

نفرض آن:

$$u = x^{n-1} \rightarrow du = (n-1) x^{n-2} dx$$

$$dv = e^{-x} dx \rightarrow v = -e^{-x}$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1} \quad e^{-x} dx = -x^{n-1} \quad e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} (n-1) x^{n-2} dx$$

$$= 0 + (n-1) \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx$$

$$= (n-1) \Gamma(n-1)$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3)........\Gamma(1)$$

ويمكن أن نثبت إن:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

$$\therefore \quad \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{x} dx = (n-1)(n-2).........1 = (n-1)! = \Gamma(n)$$

كذلك فان :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$$

وعلى هذا الأساس نحصل على:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda x} & ,x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda\lambda^{r-1}x^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda x} & ,x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{r}}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x} & ,x>0\\ 0 & ,oth.\end{cases}$$

وإذا فرضنا أن : $\lambda=\dfrac{1}{\theta}$ فإننا نحصل على دالة المتغير العشوائي x الذي يتبع توزيع كاما حيث أن كل من r و θ هما معلمتا التوزيع كاما ويمكن كتابتها بالشكل الآتي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(r)\theta^{r}}x^{r-1}e^{-\frac{x}{\theta}} & ,x>0\\ 0 & ,oth.\end{cases}$$

وعلية إذا كانت λ و n تمثلان معلمتا التوزيع فيمكن كتابته بالشكل الآتي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-1)!\,\lambda^{n}}x^{n-1}e^{-\frac{x}{\lambda}} & ,x>0\\ 0 & ,oth.\end{cases}$$

حيث أن n عدداً صحيحاً موجباً.

ملاحظة :

عندما تكون $n=1$ فان توزيع كاما يتحول إلى التوزيع الأسي .

وبذلك يمكن إثبات $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية لتوزيع كاما أي إن :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-\lambda x}dx$$

نفرض إن :

$\lambda x = u \to du = \lambda dx \to dx = \frac{du}{\lambda}$ وان $x = \frac{u}{\lambda}$ ونحصل على :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty} (\frac{u}{\lambda})^{r-1}e^{-u}\frac{du}{\lambda}$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty} \frac{u^{r-1}}{\lambda^r\lambda^{-1}}e^{-u}\frac{du}{\lambda}$$

وبعد إجراء الاختصارات نحصل على:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty} u^{r-1}e^{-u}du = \frac{1}{\Gamma(r)}\Gamma(r) = 1$$

ولإيجاد دالة العزم المولدة لدالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي x فان :

$$M_x(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx}\frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}x^{n-1}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$$

$$M_x(t) = \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{\frac{-(1-\lambda t)x}{\lambda}}dx$$

وبإجراء التحويل التالي : $u = \frac{(1-\lambda t)x}{\lambda} \to x = \frac{\lambda}{1-\lambda t}u \to dx = \frac{\lambda}{1-\lambda t}du$

والتعويض أعلاه نحصل:

$$M_x(t) = \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda t}\right)^{n-1}u^{n-1}e^{-u}\frac{\lambda}{1-\lambda t}du$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda t}\right)^n \int_0^{+\infty} u^{n-1}e^{-u}du$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}\frac{\lambda^n}{(1-\lambda t)^n}\Gamma(n)$$

وبعد الاختصارات نحصل على دالة العزم الآتية: $M_t(t) = (1-\lambda t)^{-n}$

وبعد اشتقاق الدالة بالنسبة إلى t واخذ المشتقة الأولى عند الصفر نحصل على : $\mu = M'_x(0) = \lambda n$ وكذلك فان :

$$M''_x(0) = \lambda^2 n(n+1)$$

وبهذا نحصل على التباين: $var(x) = M''_x(0) - \{M'_x(0)\}^2 = \lambda^2 n$

6-6 توزيع كاي – سكوير Chi-Square Distribution

ليكن x له توزيع كاما ،فإذا كانت $\lambda = \frac{1}{2}$ و $r = \frac{v}{2}$ (حيث أن v عدداً صحيحاً موجباً) فان دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي x هي :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^r}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & ,0 \le x < \infty \\ 0 & ,oth. \end{cases}$$

وهذه تسمى دالة الكثافة الاحتمالية *(p.d.f)* لتوزيع كاي سكوير بدرجة حرية v (degrees of freedom) ويرمز له بالرمز χ^2_v ونقول بان $x \sim \chi^2_v$ (وسوف نناقش السبب الذي نسمي به v درجة حرية لاحقاً).

وبتبسيط الدالة أعلاه نستطيع كتابتها بالشكل الآتي :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)2^{\frac{v}{2}}} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & ,0 \le x < \infty \\ 0 & ,oth. \end{cases}$$

ومن خلال تعميم دالة العزم لتوزيع كاما فأننا نستطيع أن نحصل على دالة العزم لتوزيع كاي سكوير وكما يأتي:

$$M_x(x) = (1-2t)^{-\frac{v}{2}}$$

وعليه يمكن دراسة خصائص التوزيع كاي سكوير.

1-6-6 خصائص التوزيع كاي سكوير

1. وسط وتباين التوزيع :

نشتق دالة العزم للتوزيع بالنسبة إلى t فنحصل:

$M'_X(t) = v(1-2t)^{-\frac{v}{2}-1}$, $M''_x(t) = (v^2+2v)(1-2t)^{-\frac{v}{2}-2}$ وبالتعويض عن $t=0$ نحصل على:

$$\sigma^2 = var(x) = 2v \quad و \quad \mu = v$$

2. نلاحظ أن التباين يساوي ضعف الوسط .

3. دالة التوزيع التجميعية للتوزيع:

نقول بان $F(x)$ دالة تجميعية للتوزيع اذا كانت $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)2^{v/2}} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$

وتحسب لقيم متعددة من v و x .[7]

7-6 توزيع ويبل The Weibull Distribution

نقدم هذا التوزيع الذي له تطبيقات مهمة في دراسة أنظمة الفشل **(failure models)** ونرمز له بالرمز W . وقد تم وضع هذا التوزيع عام *1951* . وهو يبين لنا فائدة النظام عندما يكون هناك وقت للفشل ويحتوي على عدد من المكونات وان النظام يفشل إذا فشلت إحدى مكوناته .

تعريف :

إذا كان x متغير عشوائياً له توزيع ويبل فان دالة الكثافة الاحتمالية له هي :

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}} & ,x\geq 0\\ 0 & ,oth.\end{cases}$$

حيث أن $\alpha,\lambda>0$.

ولكي نبين بان الدالة = $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية $(p.d.f)$ فان:

$$\int_0^{\infty}f(x)dx=\int_0^{\infty}\alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}dx$$

وباستخدام التحويل :

$$u=\lambda x^{\alpha}\rightarrow x^{\alpha}=\frac{u}{\lambda}\rightarrow \alpha x^{\alpha-1}dx=\frac{du}{\lambda}\rightarrow dx=\frac{du}{\alpha\lambda x^{\alpha-1}}$$

ومنها نحصل على أن:

$$\int_0^{\infty}f(x)dx=\int_0^{\infty}\alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}dx=\int_0^{\infty}\alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-u}\frac{du}{\alpha\lambda x^{\alpha-1}}=\int_0^{\infty}e^{-u}du=1$$

1-7-6 خصائص توزيع ويبل

1. يعتمد التوزيع على معلمتين هما α و λ .
2. عندما $\alpha=1$ فان التوزيع يؤول إلى التوزيع الأسي $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$
3. أن التوزيع ألأسي يعتبر حالة خاصة من توزيع ويبل .

ولإيجاد دالة التوزيع التجميعية لتوزيع ويبل هي :

عندما $x<0$ فان:

$$F(x)=P(X\geq x)=1-P(X<x)=1-\int_0^{\infty}\alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^{\alpha}}dt=1-1=0$$

أما في حالة أن $x\geq 0$ فان :

$F(x)=\int_0^x \alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^{\alpha}}dt$ يمكن الحصول عليها من خلال إجراء التحويل الآتي:

$$u=\lambda t^{\alpha}\rightarrow t^{\alpha}=\frac{u}{\lambda}\rightarrow \alpha t^{\alpha-1}dt=\frac{du}{\lambda}\rightarrow dt=\frac{du}{\alpha\lambda t^{\alpha-1}}$$

وعليه فان :

$$F(x)=\int_0^u \alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-u}\frac{du}{\lambda\alpha t^{\alpha-1}}=\int_0^u e^{-u}du=-e^{-u}\Big|_0^u=1-e^{-u}=1-e^{-(\lambda t^{\alpha})}$$

مثال 6-5

إذا كان وقت الفشل لمكونة معينة يتبع توزيع ويبل بمعلمة $\lambda=2$ و $\alpha=\frac{1}{2}$ ، فما هي مدة البقاء التي لاتزيد عن 90 ٪ من المكونات ؟

الحل

بما أن دالة التجميع هي :

$$F(x)=1-e^{-\lambda t^{\alpha}}=1-e^{-2x^{\frac{1}{2}}}=0.10\rightarrow x=0.0028$$

6-7-2 الوسط والتباين لتوزيع ويبل

لإيجاد الوسط للتوزيع فان:

$$E(X)=\int_0^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{\infty}x\,\alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}dx=\frac{1}{\lambda^{1/\alpha}}\int_0^{\infty}e^{-u}u^{1/\alpha}du$$

وكطريقة عامة نستخدم العلاقة الآتية :

$$E(X^r)=\int_0^{\infty}x^r f(x)dx=\int_0^{\infty}x^r(\alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}dx)=\frac{1}{\lambda^{r/\alpha}}\int_0^{\infty}e^{-u}u^{r/\alpha}du$$

حيث أن $r=1,2,3,........$ وبذلك نحصل على العزم الأول والثاني كما يأتي:

$$M_r=E(x^r)=\Gamma\left(1+\frac{r}{\alpha}\right)\Big/\lambda^{\frac{r}{\alpha}}$$ حيث أن $r=1,2,3,......$

$$M'_{r(1)}=\mu=\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Big/\lambda^{\frac{1}{\alpha}}$$

وبذلك يكون التباين : $M''_{r(2)} = \Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) \Big/ \lambda^{\frac{2}{\alpha}}$

$$\gamma 2 = \Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) / \gamma^{\frac{2}{\alpha}} - \left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) / \frac{1}{\gamma^{\alpha}}\right\}^2 = \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right\}^2}{\gamma^{\frac{2}{\alpha}}}$$

وكحالة خاصة من ويبل فانه عندما $\alpha = 2$ فان:

$$f(x) = \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,oth. \end{cases}$$

8-6 توزيع بيتا The Beta Distribution

يستخدم هذا التوزيع عادةَ عندما يكون مدى المتغير العشوائي x بين الصفر و الواحد .وهو يستخدم بشكل واسع وذلك من خلال ربط نظرية الإحصاءات المرتبة بفترة التوزيع بشكل محدد في الإجراءات البيزية .

تعريف :

ليكن x متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بيتا فان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & ,0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ,oth. \end{cases}$$

حيث أن $\alpha > 0$ و $\beta > 0$.

ولإيجاد دالة التوزيع التجميعية للتوزيع فإنها تمثل الدالة:

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

وبما أن : $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ فان $F(x)=1$.

وان $F(x)=0$ لكل $x \le 0$ و $F(x)=1$ لكل $x \ge 1$.

ملاحظة:

يمكن البرهنة على العلاقة السابقة من خلال أن :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^\infty y^{\beta-1}e^{-y}dy\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}y^{\beta-1}e^{-(x+y)}dxdy$$

يترك برهانها للطالب .

6-8-1 خصائص توزيع بيتا

1. يعتمد التوزيع على معالم اثنين هما α و β .
2. نستطيع أن نكون عدة أشكال للتوزيع اعتماداً على قيم α و β

6-8-2 المتوسط والتباين لتوزيع بيتا

لحساب المتوسط والتباين لتوزيع بيتا فان :

$$E(X) = \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \alpha \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

وبنفس الأسلوب يمكن إيجاد التباين وذلك من خلال حساب:

$$E(X^2) = \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^2 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

وبذلك نحصل على:

$$var(x) = \sigma^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

9-6 توزيع كوشي The Cauchy Distribution

دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع هي :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad , -\infty < x < +\infty$$

وان الدالة التجميعية للتوزيع تكون كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(tan^{-1}(xt\frac{\pi}{2}) & , -\infty < x < +\infty \\ 0 & , x \to -\infty \\ 1 & , x \to +\infty \end{cases}$$

وعليه فان :

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{2\mu} [\log(a^2+1)] = +\infty$$

وهذا التوزيع ليس له قيم متوقعة ولاتباين .

تمارين الفصل السادس

1. برهن إن $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ؟ ثم برهن إن توزيع كاما يؤول إلى التوزيع الأسي ؟

2. إذا كان وقت الفشل لمكونة معينه يتبع توزيع ويبل بمعلمة $\lambda=2$ و $\alpha=\frac{1}{2}$ ما هي مدة البقاء التي لا تزيد عن 90% من المكونات ؟

3. اذا كان x متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي وكان احتمال أن تكون قيمة المتغير العشوائي اقل من 50 هو 0.1 واكبر من 100 هو 0.05 ،احسب ما يأتي:
   a) احتمال $p(x\leq 70)$ ؟
   b) احتمال $p[(x\leq 70)/(60\leq x\leq 80)]$ ؟

4. اذا كان x متغيراً عشوائياً وتوزيعه الاحتمالي $N(2,9)$ أوجد قيمة a التي تحقق المساواة التالية $2p(x\leq a)=1-3p(x>a)$ ؟

5. اذا كان x متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الأسي وكان $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{50}$، وإذا كان $Y=2x+1$ فأوجد دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع له؟

6. اذا كان x متغيراً عشوائياً يمثل عمر المصباح الكهربائي الزمني الذي ينتج من قبل ماكنه ،حيث أن هذا المتغير يتبع التوزيع الأسي وان $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{1000}$ اوجد ما يأتي:
   a) $p(|x|\leq 1500)$ ؟
   b) القيمة المتوقعة $E(x/x\leq 5)$ ؟
   c) دالة التوزيع الشرطي $p(x/x\leq 5)$ ؟

7. اذا كان المتغير العشوائي x يخضع للتوزيع المنتظم المستمر وكان $a=40$ ، $b=60$ فاوجد ما يأتي:
   a) دالة الاحتمال الشرطية محسوبة من دالة التوزيع $F(x/x\leq 20)$ ؟
   b) دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية $f(x/x\leq 20)$ ؟

8. من التوزيع الطبيعي المعياري اوجد الاحتمالات الآتية:

a) $p(0 < z < 0.7)$ ؟

b) $p(-1 < z < 0)$ ؟

9. اذا كان متوسط أجر العامل 4 دنانيرفي الساعة بانحراف معياري 0.50 دينار،وكانت الأجور تتبع توزيعاً طبيعياً فما نسبة العمال الذين يتقاضون أجراً ما بين 2.5 و 3 دنانير في الساعة؟

الفصل السابع

التوزيعات الثنائية

1-7 مقدمة

2-7 المتغير العشوائي المتقطع الثنائي ودوال التوزيع الاحتمالي .

3-7 المتغير العشوائي المستمر الثنائي ودالة الكثافة الاحتمالية المشتركة

4-7 التوزيعات الهامشية والشرطية

5-7 المتغيرات العشوائية المستقلة

6-7 التوقع للدوال ذات المتغيرين العشوائيين

7-7 العزوم الثنائية

8-7 معامل الارتباط

9-7 التوقع الشرطي

تمارين الفصل السابع



الفصل السابع

التوزيعات الثنائية

BIVARIATE DISTRIBUTIONS

7-1 مقدمة Introduction

في دراستنا للتوزيعات ذات المتغيرات العشوائية في الفصول السابقة ،درسنا التوزيعات ذات المتغير العشوائي الواحد ، حيث أن المشاهدات تأخذ متغير واحد.وفي حالات كثيرة فان المشاهدات تتطلب متغيرين أو أكثر ، لذلك سوف نهتم في هذا الفصل بدراسة وتقييم العلاقات الإحصائية لهذه المتغيرات.فمثلاً في مسألة المتغيرات الثلاثة نأمل أن نتعرف أيهما من مشاهدات المتغير العشوائي الأول تزداد تبعاً لزيادة مشاهدات المتغير العشوائي الثاني ، ولكن مشاهدات المتغير العشوائي الثالث غير مرتبطة بالتغير الذي يحصل في المتغيرين السابقين .[2]

هذه المتغيرات تكون أما كمية مستمرة(Quantitative Continuous) أو نوعية متقطعة(Qualitative Discrete) أو تكون مختلطة(مستمرة ومتقطعة) . إن عدد الاحتمالات الممكنة يزداد بزيادة عدد المتغيرات العشوائية ومن الأمثلة على ذلك ما يأتي:

- في الدراسات الطبية،فان مشاهدات ضغط الدم تمثل المتغير X ومعدل النبض يمثل المتغير Y لكل مجموعة من المرضى.في هذه الحالة يكون كلا المتغيرين هما متغيرات كمية مستمرة.
- في شركة ما ، فان X يمثل العدد الشهري للسفرات وان Y يمثل مصاريف الانتقال.في مثل هذه الحالة فان X يمثل متغير كمي متقطع بينما Y يمثل متغير كمي مستمر.

في هذا الفصل سوف نوسع مفهوم المتغير العشوائي ودالة التوزيع الاحتمالي له إلى مفهوم المتغيرين العشوائيين ودوالهما التوزيعية الاحتمالية المشتركة(Joint Probability Distribution) ، والفكرة المهمة التي سوف نقدمها هي فكرة الاستقلال(Independence) ،الارتباط(Correlation) والتوقع الشرطي (Conditional Expectation) وسوف ندرس بعض التوزيعات الثنائية المتقطعة والمستمرة .

2-7 المتغير العشوائي المتقطع الثنائي ودوال التوزيع الاحتمالي

Bivariate Discrete Random Variables And Joint Probability Distribution Functions

لكي نتناول المتغير العشوائي المتقطع الثنائي ودالة التوزيع الاحتمالي المشتركة المرتبطة به،سوف نتناول بعض الأمثلة البسيطة.

مثال 7-1

حاوية تحتوي على خمسة مواد،اثنان منها سليمة بشكل كامل ويرمز لها بالرمز S_1 ، S_2 ،واثنان منها تحتوي على عيب بسيط ويرمز لها بالرمز M_1 ، M_2 ، والباقي فيها عيب رئيسي ويرمز لها بالرمز F .سحبت منها عينة عشوائية مكونة من مادتين وبدون إرجاع.ليكن كل من X و Y متغيرين عشوائيين يمثلان عدد المواد السليمة والمواد التي فيها عيب بسيط على التوالي في العينة .

في بداية الأمر نقوم بحساب عناصر فضاء العينة S وكما يأتي:

$$S = \{S_1S_2, S_1M_1, S_1M_2, S_1F, S_2M_1, S_2M_2, S_2F, M_1M_2, M_1F,$$
$$M_2F, S_2S_1, M_1S_1, M_2S_1, FS_1, M_1S_2, M_2S_2, FS_2, M_2M_1,$$
$$FM_1, FM_2\}$$

وبهذا يكون عدد العناصر لفضاء العينة هو (20) عنصراً يمكن حسابها باستخدام علاقة التباديل.ويمكن أن نضع القيم المرتبطة لـ(X,Y) بالأحداث اعلاه ونمثلها بـ(x,y) وكما يأتي:

$(x,y)=(2,0)\ (1,1)\ (1,1)\ (1,0)\ (1,1)\ (1,1)\ (1,0)\ (0,2)\ (0,1)\ (0,1)$

$(2,0)\ (1,1)\ (1,1)\ (1,0)\ (1,1)\ (1,1)\ (1,0)\ (0,2)\ (0,1)\ (0,1)$

ولاننا أستخدمنا عينة عشوائية بدون إرجاع(without replacement) فـأن كـل حدث بسيط يكون متساوي الحدوث(equally likely to occur) ويساوي $\frac{1}{20}$ ولهذا سوف نحـصل علـى التوزيـع الاحتمـالي المـشترك(joint probability distribution) لـ X و Y:

(x,y)	$(2,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$
$P(X=x,\ Y=y)$	$2/20$	$8/20$	$4/20$	$4/20$	$2/20$

وعلى أساس هذا المثال سوف نضع بعض التعاريف الآتية:

تعريف 7-1

لـيكن S فـضاء عينـة لتجربـة عـشوائية مـا،وليكن كـل مـن $X=X(e)$ و $Y=Y(e)$ دالتي القيمـة الحقيقيـة الـتي تـربط عـدد حقيقـي إلى كـل عنصر e من عناصر فضاء العينة S .لذا فان الـزوج المرتـب (X,Y) يـسمى مـتغير عشوائي ذات البعدين(وأحيانا يسمى متجه عشوائي).أذا كان عدد القيم الممكنـة لـ (X,Y) منتهـي(infinite) أو معـدود غـير منتهـي(countably infinite) فان (X,Y) يسمى متغير عشوائي متقطع ذات البعدين.

سـوف نمثـل القـيم الممكنـة لـ (X,Y) بـ (x_i,y_j) حيـث أن $i=1,2,...,m_x$ و $j=1,2,...,m_y$ حيث أن m_x و m_y يذهبان إلى ∞ .

وان $R_{x,y}=\{(x_i,y_j):i=1,2,...,m_x;\ j=1,2,...,m_y\}$ يمثـل فـضاء ذات البعدين لـ (X,Y) .كما حصل في حالة البعد الواحد. سـوف نهـتم بالاحتمـالات مثل $P(X=x,Y=y)$ و $P(a_1\le X\le a_2, b_1\le Y\le b_2)$.إن الدالة الرياضية الـتي نستخدمها لحساب هذه الاحتمـالات تـسمى دالـة التوزيـع الاحتمـالي المـشتركة (joint probability distribution function) ويرمزلهابالرمز $(j.p.d.f)$ للمتغيرين العشوائيين X و Y .

تعريف 7-2

ليكن (X,Y) متغير عشوائي متقطع ذات بعدين معرف على الفضاء $R_{x,y}$.

فان $P(X=x,Y=y)$ يرمز لها بالرمز $f(x,y)$ وتسمى دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة لـ X و Y وتحقق الخواص الآتية:

1. $0 \le f(x,y) \le 1$.

2. $\sum_{(x,y)\in R_{x,y}} \sum f(x,y) = 1$.

3. $P\{(X,Y)\in A\} = \sum_{(x,y)\in R_{x,y}} \sum f(x,y)$.

حيث A هي مجموعة جزئية من الفضاء $R_{x,y}$.

مثال 7-2

في المثال 7-1 نفرض أن العينة المختارة تتكون من ثلاث مواد تسحب بشكل عشوائي من الحاوية ،فإذا كان كل من X و Y متغيرين عشوائيين متقطعين يمثلان المواد السليمة والمواد التي تحوي على عطل بسيط على التوالي،إحسب دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة لـ X و Y؟

الحل

بإهمال عملية الترتيب فان الأحداث الممكنة للعينة هي:

$S_1S_2M_1 \quad S_1S_2M_2 \quad S_1S_2F \quad S_1M_1M_2 \quad S_1M_1F \quad S_1M_2F$

$S_2M_1M_2 \quad S_2M_1F \quad S_2M_2F \quad M_1M_2F$

وان قيم (x,y) بالنسبة لـ (X,Y) المقابلة لها هي:

$(x,y)=(2,1)\ (2,1)\ (2,0)\ (1,2)\ (1,1)\ (1,1)\ (1,2)\ (1,1)\ (1,1)\ (0,2)$

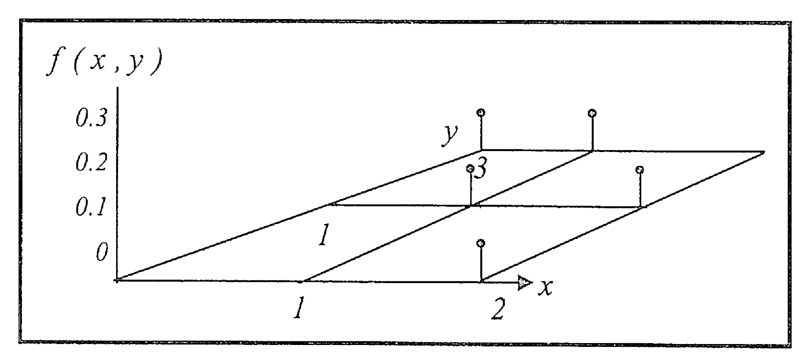
وان الاختيار العشوائي للنتائج الممكنة اعلاه يكون باحتماليات متساوية أي أن الاحتمالية $1/10$ ،لذلك فان دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة *(j.p.d.f)* للمتغيرين العشوائيين X و Y هي:

(x,y)	$(2,1)$	$(2,0)$	$(1,1)$	$(0,2)$	$(1,2)$
$P(X=x,\ Y=y)$	$2/10$	$1/10$	$4/10$	$1/10$	$2/10$

وعلية يمكن حساب الاحتمال الآتي:

$$P(X \leq 1, Y \geq 1) = P(X = 0, Y = 2) + P(X 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2)$$
$$= 7/10$$

ويمكن تمثيل الدالة بالرسم المبين في الشكل7-1 أدناه:



الشكل 7-1 (رسم دالة الاحتمال التوزيعية المشتركة لـ X و Y)

لقد لاحظنا في الفصول السابقة بان دالة التوزيع التجميعية (c.d.f)تلعب دوراً مهماً في دراسة المتغير العشوائي ذات البعد الواحد،ولذلك سوف نوسع هذا المفهوم بالنسبة للمتغيرات العشوائية المتقطعة ذات البعدين من خلال التعريف الآتي:

تعريف 7-3

ليكن (X,Y) متغيرين عشوائيين متقطعين ، فان دالة التوزيع التجميعية الثنائية لـ X و Y (bivariate c.d.f)تعرف كما يأتي:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} f(u,v) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7\text{-}1)$$

ودالة التوزيع التجميعية الثنائية تحقق عدداً من الخواص ،علماً أن الخواص الثلاثة الأولى منها تبرهن بأسلوب مشابه لما تم برهانه في حالة المتغير الواحد.

والنظرية الآتية تُبين هذه الخواص حيث سنبرهن منها الفقرة (d)فقط.

نظرية 7-1

لتكن $F(x,y)$ دالة التوزيع التجميعية الثنائية لـ (X,Y) فان $F(x,y)$ تحقق الخواص التالية:

a) $F(\infty,\infty)=1$

b) $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0$

c) $F(x,y)$ دالة غير متناقصة في كل متغير متقطع.

d) لجميع القيم $x_1,x_2(x_2>x_1)$ و $y_1,y_2(y_2>y_1)$، يكون:

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geq 0$$

البرهان

من الشكل 7-2 أدناه نلاحظ أن:

$$\{(X\leq x_2)\cap(Y\leq y_2)=\{(X\leq x_1)\cap(Y\leq y_1)\}\cup\{(X\leq x_1)\cap(y_1<Y\leq y_2)\}$$
$$\cup\{(x_1<X\leq x_2)\cap(Y\leq y_1)\}\cup\{(x_1<X\leq x_2)\cap(y_1<Y\leq y_2)\}$$

لذلك سوف نستخدم قانون الجمع للأحداث المنفصلة فنحصل على:

$$P(x_1<X\leq x_2,y_1<Y\leq y_2)=P(X\leq x_2,Y\leq y_2)$$
$$-P(X\leq x_1,Y\leq y_1)\ -P(X\leq x_1,y_1<Y\leq y_2)$$
$$-P(x_1<X\leq x_2,Y\leq y_1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{-}2)$$

نكتب:

$$P(X\leq x_1,y_1<Y\leq y_2)=P(X\leq x_1,Y\leq y_2)-P(X\leq x_1,Y\leq y_1)$$

و

$$P(x<X\leq x_2,Y\leq y_1)=P(X\leq x_2,Y\leq y_1)-P(X\leq x_1,Y\leq y_1)$$

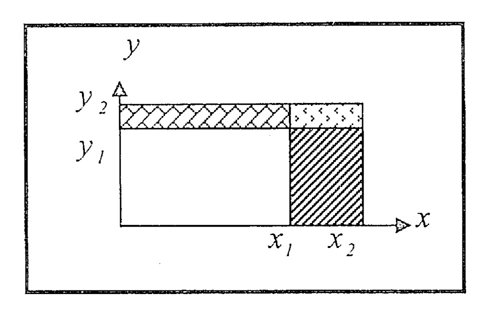
نعوض عن العلاقتين اعلاه في العلاقة $(7-2)$ فنحصل على :

$$P(x_1<X\leq x_2,y_1<Y\leq y_2)=P(X\leq x_2,Y\leq y_2)$$
$$-P(X\leq x_1,Y\leq y_2)\ -P(X\leq x_2,Y\leq y_1)+P(X\leq x_1,Y\leq y_1)$$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{-}3)$$

وبهذا نحصل على:

$$P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)\ge 0$$



الشكل (7-2)

مثال 7-3

اذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة(j.p.d.f) لـ X و Y هي:

$$f(x,y)=\begin{cases}\binom{2}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} & ,x=1,2,\ldots,\infty \quad ;y=0,1,2.\\ \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

حيث $1\le x<\infty$ و $0\le y\le 2$، أوجد دالة التوزيع التجميعية الثنائية لـ (X,Y)؟

الحل

نحسب دالة التوزيع التجميعية كما يأتي:

$$F(x,y)=\sum_{u=1}^{x}\sum_{v=0}^{y}f(u,v)=\sum_{u=1}^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{u+2}\sum_{v=0}^{y}\binom{2}{v}$$

$$=\frac{1}{4}\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\}\sum_{v=0}^{y}\binom{2}{v}$$

وعليه تكون الدالة التجميعية هي:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & for \quad x<1 \quad and \quad y<0 \\ \frac{1}{4}\{1-(\frac{1}{2})^x\}\sum_{v=0}^{y}\binom{2}{v} & for \quad x\geq 1, 0\leq y\leq 2 \\ 1-(\frac{1}{2})^x & for \quad x\geq 1, y>2 \end{cases}$$

إن الدالة اعلاة تحقق الخواص في نظرية(7-1) وعلى الطالب إثبات ذلك.

7-3 المتغير العشوائي المستمر الثنائي ودالة الكثافة الاحتمالية المشتركة

Bivariate Continuous Random Variables And Joint Probability Density Functions:

لإثارة فكرة التوزيع الثنائي المستمر،فإننا سنوضح مفهوم المدرج التكراري النسبي (relative frequency histogram) للتعامل مع هذه الحالة.

نفرض أن لدينا n من أزواج القيم $(x_i, y_i), i=1,2,...,n$، فإذا كانت n كبيرة نسبياً ،فإننا نضع المشاهدات في خلايا أو فترات صفية ثنائية هي $(c_0,c_1),(c_1,c_2),...,(c_{k-1},c_k)$ بالنسبة لمحور x والفترات الصفية $(d_0,d_1),(d_1,d_2),....,(d_{l-1},d_l)$ بالنسبة لمحور y.فإذا كان f_{ij} يمثل التكرار أو عدد المشاهدات في الخلية (i,j)المعرفة بالفترة الصفية الثنائية (c_{i-1},c_i) و(d_{j-1},d_j)فان f_{ij}/n يمثل التكرار النسبي للمشاهدات في الخلية (i,j) حيث أن $i=1,2,...,k$ و $j=1,2,...,l$.

ويرسم المدرج التكراري النسبي من خلال رسم الأعمدة فوق الخلايا بحيث أن حجم العمود فوق الخلية (i,j) يساوي التكرار النسبي f_{ij}/n.وهكذا فان المدرج التكراري النسبي يمثل الدالة $h_n(x,y)$ المعرفة بالصيغة الآتية:

$$h_n(x,y)=\frac{f_{ij}}{n(c_i-c_{i-1})(d_j-d_{j-1})} \quad ....(7\text{-}4)$$

بالنسبة لـ $c_{i-1}<x\leq c_i, d_{j-1}<y\leq d_j \quad, i=1,2,...,k, j=1,2,...,l$

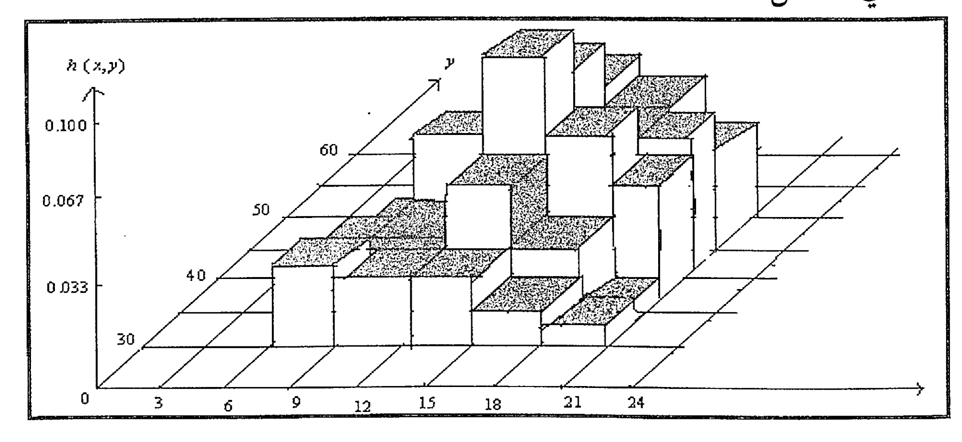
مثال 7-4

البيانات في الجدول (7-1) أدناه تبين لنا ترتيب التوزيع التكراري الثنائي لمختلف سنوات الخدمة x و الراتب y في وحدات مرمزة لعينة من (150)عامل الذين يعملون في شركة ما، حيث أكملوا خدمة لاتقل عن ست سنوات في الشركة.

الجدول (7-1)

الراتب y / x	من 30 وتحت 35	من 35 وتحت 40	من 40 وتحت 45	من 45 وتحت 50	من 50 وتحت 55
6 وأقل من 9	*5*	*4*	*3*	*3*	*1*
9 وأقل من 12	*4*	*5*	*10*	*5*	*6*
12 وأقل من 15	*2*	*8*	*15*	*13*	*10*
15 وأقل من 18	*2*	*4*	*10*	*8*	*8*
18 وأقل من 21	*1*	*1*	*7*	*8*	*5*

حيث x يمثل سنوات الخدمة.ويمكن رسم المدرج التكراري النسبي للجدول أعلاه كما في الشكل 7-3 :



الشكل (7-3) يبين المدرج التكراري النسبي الثنائي

نلاحظ أن دالة المدرج التكراري النسبي الثنائي $h_n(x,y)$ تحقق الخواص الآتية:

a) $h_n(x,y) \geq 0$ لجميع x و y.

b) الحجم الكلي المحدد بالمستوي (x,y) من الأعلى والدالة $h_n(x,y)$ من الأسفل يساوي واحد أي أن:

$$\int_{c_0}^{c_k}\int_{d_0}^{d_l} h_n(x,y)dxdy = 1$$

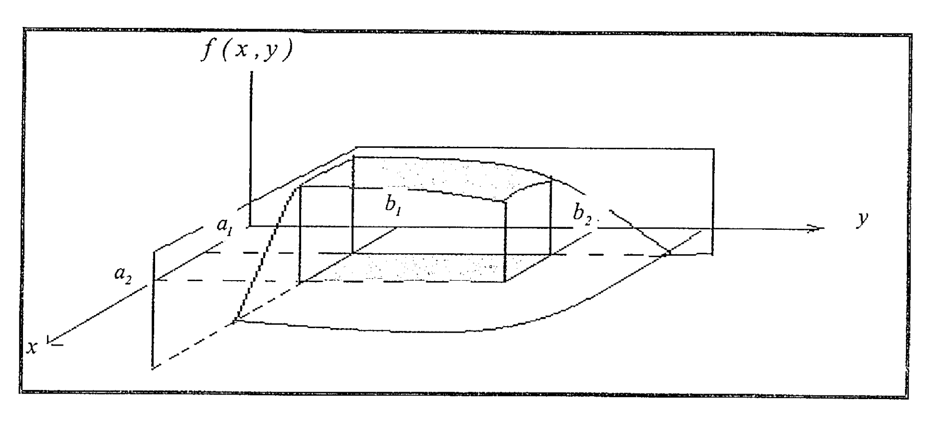
c) احتمالية أي حدث A مكون من اتحاد الفترات الصفية الثنائية يمكن أن نحسبه من العلاقة الآتية:

$$p(A) \approx \iint_A h_n(x,y)dxdy$$

ولتوضيح ذلك أكثر،نفرض أن عدد المشاهدات n يزداد وبذلك نستطيع خفض عدد الخلايا وبأخذ الغاية للدالة $h_n(x,y)$ فإنها تقترب تدريجياً من الدالة الرياضية التي نسميها $f(x,y)$ والتي تعطي القيمة الحقيقية للاحتمال المتعلق بالمتغيرين X و Y من خلال التكامل الآتي:

$$P(a_1 < X < a_2, b_1 < Y < b_2) = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dydx \quad ....(7\text{-}5)$$

إن هذه الاحتمالية تمثل حجم الجسم فوق المستطيل المظلل في الشكل (7-4) أدناه:



الشكل(7-4)

وعلى ضوء هذه المفاهيم سنضع التعريف الآتي:

تعريف7-4

ليكن (X,Y) متغيراً عشوائياً ذو بعدين الذي نفترض إن جميع قيمه في مجموعة جزئية غير معدودة من الفضاء الاقليدي، فان مثل هذا المتغير يسمى متغير عشوائي مستمر ذات البعدين ،ومجموعة القيم التي يأخذها المتغير (X,Y) تسمى مدى الفضاء ويرمز لها بالرمز $R_{X,Y}$.[4]

إن الدالة $f(x,y)$ تسمى دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة (joint probability density function) للمتغيرين X و Y ويرمز لها بالرمز(j.p.d.f) اذا حققت الشروط الآتية:

1) $f(x,y) \geq 0$ لجميع قيم $(x,y) \in R_{X,Y}$.

2) $\iint\limits_{R_{X,Y}} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

3) احتمالية أي حدث $(X,Y) \in A$ ،عندما A مجموعة جزئية من $R_{X,Y}$ هي:

$$P\{(X,Y) \in A\} = \iint\limits_{A} f(x.y)\,dx\,dy$$

ملاحظة:

لأي عددين موجبين Δx و Δy صغيران جداً،فان $f(x,y)\Delta x \Delta y$ تساوي تقريباً $P(x \leq X \leq x+\Delta x, y \leq Y \leq y+\Delta y)$.

مثال7-5

لتكن الدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ \\ 0 \quad , & otherwise \end{cases}$$

بين إنها دالة كثافة احتمالية مشتركة؟ثم احسب $p(X<1, Y>3)$ ؟

الحل

للتحقق من كون الدالة هي دالة كثافة احتمالية يجب أن نحقق الشروط في التعريف 4-7 حيث انه من الواضح بان الدالـة $f(x,y) \geq 0$ لجميـع قيـم x و y في الفـترة المعرفة عليها الدالة،كذلك فان :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{2}\int_{2}^{4}\frac{1}{8}(6-x-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{0}^{2}\left[\frac{6y}{8}-\frac{xy}{8}-\frac{y^2}{16}\right]_2^4 dx$$

$$= \int_{0}^{2}\left[\frac{3}{4}-\frac{x}{4}\right]dx = 1$$

وهذا يبين أن الدالة $f(x,y)$ هي دالة الكثافة الاحتمالية.ولحساب

$$P(X<1,Y>3) = \int_{0}^{1}\int_{3}^{4}\frac{1}{8}(6-x-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{0}^{1}\left[\frac{3y}{4}-\frac{xy}{8}-\frac{y^2}{16}\right]_3^4 dx$$

$$= \int_{0}^{1}\left[\frac{5}{16}-\frac{x}{8}\right]dx = \frac{1}{4}$$

1-3-7 دالة التوزيع التجميعية المشتركة

The Joint Commutative Distribution Function

للحصول علـى دالـة التوزيـع التجميعيـة المـشتركة$(j.c.d.f)$ في حالـة المـتغير العشوائي المستمر الثنائي (X,Y) فإننا فقط نستبدل عمليـة الجمـع المـضاعف في حالـة المتغير المتقطع إلى عملية التكامل المضاعف.

وعلية اذا كان (X,Y) متغير عشوائي مستمر ذات بعدين فنعرف دالـة التوزيـع التجميعية المشتركة كالآتي:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{-}6)$$

ملاحظة:

إن الدالة $F(x,y)$ تحقق جميع الخواص التي ورد ذكرها في نظرية (7-1)عندما تكلمنا عن حالة المتغير العشوائي المتقطع الثنائي.وبالإضافة إلى ذلك فانه اذا كانت المشتقة الأولى والثانية للدالة $F(x,y)$ موجودة فان

$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$ أي أننا نحصل منها على دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للتوزيع.ويمكن توضيح ذلك من خلال:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x,y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta x\, \Delta y} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\left[F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y)\right] - \left[F(x, y+\Delta y) - F(x,y)\right]}{\Delta x\, \Delta y}$$

ومن العلاقة(7-3) نحصل على: $\lim_{\Delta x \to 0}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\left[p(x < X \le x+\Delta x, y < Y \le y+\Delta y)\right]}{\Delta x\, \Delta y} = f(x,y)$$

مثال 7-6

لتكن الدالة في المثال (7-5):

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ \\ 0 \quad , & otherwise \end{cases}$$

أحسب دالة التوزيع التجميعية المشتركة$(j.c.d.f)$ ؟

الحل

حسب التعريف(7-4)فإن: $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$

بالنسبة إلى $x\le 0$أو $y\le 2$ و $f(u,v)=0$ بالنسبة إلى $u\le x,t\le y$ وكذلك فإن $F(x,y)=0$ بالنسبة إلى $x\le 0,y\le 2$.

وبالنسبة إلى $0<x<2,2<y<4$ نحصل على: $F(x,y)=\int_{0}^{x}\int_{2}^{y}\frac{1}{8}(6-u-v)dvdu$

$$F(x,y)=\int_{0}^{x}\frac{1}{8}\left\{6-u)(y-2)-\frac{y^2}{2}+2\right\}du$$

$$F(x,y)=\frac{1}{16}x(y-2)(10-y-x)$$

كذلك نلاحظ أن :

$$F(x,y)=\int_{0}^{x}\int_{2}^{4}\frac{1}{8}(6-u-v)dvdu=\frac{1}{8}x(6-x)$$

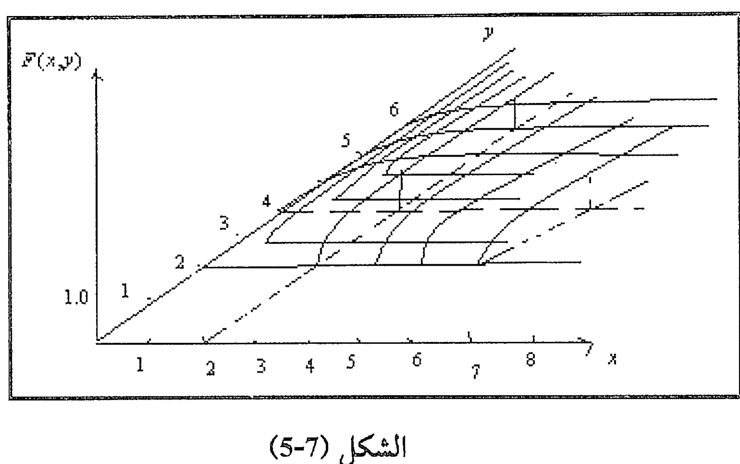
اذا كانت $0<x<2,y\ge 4$.وبأسلوب مشابه فان :

$$F(x,y)=\int_{0}^{2}\int_{2}^{y}\frac{1}{8}(6-u-v)dvdu=\frac{1}{8}(y-2)(8-y)$$

إذا كانت $x\ge 2,2<y<4$. وأخيرا نحصل على:

$F(x,y)=\int_{0}^{2}\int_{2}^{4}\frac{1}{8}(6-u-v)dvdu=1$ حيث أن $x\ge 2,y\ge 4$.

والشكل (7-5)أدناه يبين رسم للدالة أعلاه:



الشكل (7-5)

7-4 التوزيعات الهامشية والشرطية

Marginal And Conditional Distributions

لتكن $f(x,y)$ هي دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين X و Y. فأحيانا نهتم بدالة التوزيع الاحتمالي $f_1(x)$ للمتغير العشوائي X، أو دالة التوزيع الاحتمالي $f_2(y)$ للمتغير العشوائي Y. إن الدالتين المذكورتين تشيران إلى الدالتين الهامشيتين للمتغيرين العشوائيين X و Y على التوالي.

ومن تعريف دالة التوزيع التجميعية نستطيع أن نوجد دالة التوزيع التجميعية الهامشية للمتغيرين X و Y.

مثال 7-7

لتكن دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين المتقطعين X و Y هي:

x/y	1	2	3	Total
0	0.3	0.2	0.2	0.7
1	0.0	0.1	0.1	0.2
2	0.1	0.0	0.0	0.1
Total	0.4	0.3	0.3	1.0

أحسب دالة التوزيع الاحتمالية الهامشية المشتركة ودالة التوزيع التجميعية للمتغيرين العشوائيين X و Y؟

الحل

لحساب الدالة الهامشية:

$$f_1(0)=P(X=x)=P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)$$
$$P(X=0,Y=3)=0.3+0.2+0.2=0.7$$

$$f_1(1)=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3)$$
$$=0.0+0.1+0.1=0.2$$

$$f_1(1)=P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)+P(X=2,Y=3)$$
$$=0.1+0.0+0.0=0.1$$

وبنفس الأسلوب فان:

$$f_2(1)=P(Y=y)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)$$
$$P(X=2,Y=1)=0.3+0.0+0.1=0.4$$

$$f_2(2)=P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=2)$$
$$=0.2+0.1+0.0=0.3$$

$$f_2(3)=P(X=0,Y=3)+P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=3)$$
$$=0.2+0.1+0.0=0.3$$

ولحساب دالة التوزيع التجميعية للدالتين $f_1(x)$ و $f_2(y)$ للمتغيرين X و Y وكما يلي:

x :	0	1	2
$f_1(x)$:	0.7	02	0.1
$F_1(x)$:	0.7	0.9	1.0
y :	1	2	3
$f_2(y)$:	0.4	0.3	0.3
$F_2(y)$:	0.4	0.7	1.0

من المثال السابق يمكن أن نضع التعريف الآتي:

تعريف7-5

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين متقطعين لهما دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة $f(x,y)$ في الفضاء $R_{X,Y}$. فان دالتي التوزيع الاحتمالية الهامشية للمتغيرين X و Y هما:

$$f_2(y) = \sum_{x(y)} f(x,y) \text{ و } f_1(x) = \sum_{y(x)} f(x,y) \quad \text{.................}(7\text{-}7)$$

حيث أن $x,y \in R_{X,Y}$.

عندما $\sum_{x(y)}$ يمثل مجموع جميع القيم الممكنة بالنسبة إلى x المرتبطة مع قيم y المعطاة،وان $\sum_{y(x)}$ يمثل مجموع جميع القيم الممكنة بالنسبة إلى y المرتبطة مع قيم x المعطاة.

وأن الدالتين التجميعيتين الهامشيتين بالنسبة إلى X و Y تعطى بالشكل الآتي:

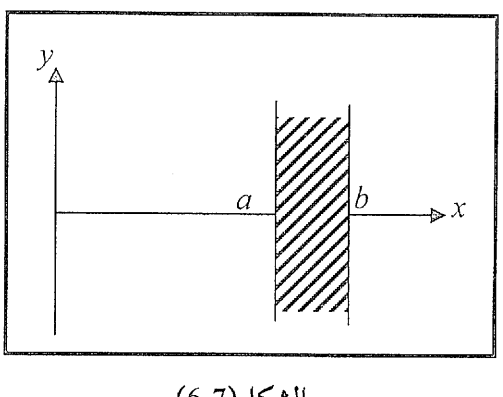
$$F_2(y) = f(\infty, y) = \sum_{v \le y} f_2(v) \text{ و } F_1(x) = f(x,\infty) = \sum_{u \le x} f_1(u) \quad \text{....}(7\text{-}8)$$

على التوالي.

ملاحظة:

يبدو للقارئ بأن كل من الدالتين $f_1(x)$ و $f_2(y)$ ليستا دوال ثنائية ،ولكن سميت دوال توزيع احتمالي هامشي، لأنها أُشتقت من الدالة الثنائية $f(x,y)$. [6].

سوف نعرّف التوزيعات الهامشية في حالة المتغيرات المستمرة بنفس الأسلوب الذي عرفنا به التوزيعات الهامشية في حالة المتغيرات المتقطعة ولكن من خلال استبدال المجموع بعملية التكامل.ولهذا سنفرض $f(x,y)$ بأنها دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين المستمرين X و Y،وسوف نهتم بالاحتمال $P(a < X < b)$ حيث أنه يمثل الحجم تحت الدالة $f(x,y)$ والشريط المظلل في الشكل (7-6) أدناه:



الشكل(7-6)

نلاحظ أن:

$$P(a<X<b)=\int_a^b\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dydx=\int_a^b f_1(x)dx$$

عندما $f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$.

وبنفس الأسلوب بالنسبة للدالة الهامشية $f_2(y)$.

تعريف 7-6

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين لهما دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة $f(x,y)$ في الفضاء $R_{X,Y}$. فان دالتي التوزيع الاحتمالية الهامشية للمتغيرين X و Y هما:

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx \text{ و } f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{-}9)$$

حيث أن $x,y\in R_{X,Y}$.

وأن الدالتين التجميعيتين الهامشيتين بالنسبة إلى X و Y تعطى بالشكل الآتي:

$$F_2(y)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}f_2(v)dv \text{ و } F_1(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}f_1(u)du \quad \ldots\ldots(7\text{-}10)$$

على التوالي.

مثال 7-8

لتكن دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين X و Y هي:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2/81 & ,0<x<3,0<y<3 \\ 0 & Elsewhere \end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالية الهامشية بالنسبة إلى X و Y ؟ ثم أوجد دواليهما التجميعية ،ودالة التوزيع التجميعية المشتركة ؟

الحل

دوال التوزيع الاحتمالية الهامشية هي:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^3 \frac{x^2y^2}{81}dy=\frac{x^2y^3}{81\times 3}\Bigg|_0^3=\frac{x^2}{9}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_0^3 \frac{x^2y^2}{81}dx=\frac{x^3y^2}{81\times 3}\Bigg|_0^3=\frac{y^2}{9}$$

دوال التوزيع التجميعية الهامشية هي :

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x} f_1(u)du=\int_0^x \frac{u^2}{9}du=\frac{u^3}{9\times 3}\Bigg|_0^x=\frac{x^3}{27} \quad 0<x<3$$

$$F_2(y)=\int_{-\infty}^{x} f_2(v)dv=\int_0^x \frac{v^2}{9}dv=\frac{v^3}{9\times 3}\Bigg|_0^y=\frac{y^3}{27} \quad 0<y<3$$

نلاحظ أن :

$F_1(x)=\begin{cases} 1 & ,x>3 \\ 0 & ,x\le 0 \end{cases}$ وكذلك $F_2(y)=\begin{cases} 1 & ,y>3 \\ 0 & ,y\le 0 \end{cases}$ وبذلك تكون دالة التوزيع التجميعية المشتركة للمتغيرين X و Y هي:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du=\begin{cases}0 & ,x<0 \ \text{or} \ y<3\\ x^3y^3/729 & ,0<x<3,0<y<3\\ x^3/27 & ,0<x<3,y>3\\ y^3/27 & ,x>3,0<y<3\\ 1 & ,x>3,y>3\end{cases}$$

1-4-7 التوزيع الشرطي الثنائي Bivariate Conditional Distribution

يستخدم هذا المفهوم بشكل كبير في الإحصاء الرياضي ،ولقد سبق لنا وأن ناقشنا في الفصل الثاني موضوع الاحتمال الشرطي لأي حدث A عندما يكون الحدث B معطى أو حاصل فان :

$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ و $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ حيث أن كل من $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$.

فإذا كان المتغيران العشوائيان المتقطعان X و Y يقابلان الحدثين A و B على التوالي فعندها يكون بالإمكان التحدث عن دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير العشوائية المتقطعة.[5]

2-4-7 دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغيرات العشوائية المتقطعة

Conditional Probability Distribution Function Of Discrete Random Variables:

تعريف7-7

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين متقطعين لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة(joint $p.d.f$) $f(x,y)$ ودالتي التوزيع الاحتمالي الهامشية (marginal $p.d.f$) $f_1(x)$ و $f_2(y)$ على التوالي حيث كلاهما تمثلان دوال موجبة فان :

$$P(X=x/Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

نضع $g_1(x/y)=P(X=x/Y=y)$ بحيث أن:

$$g_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \qquad \text{.......(7-11)}$$

حيث $f_2(y)>0$.

فإن $g_1(x/y)$ تسمى دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير العشوائي المتقطع X عندما يكون المتغير العشوائي المتقطع $Y=y$ معطى.

وبنفس الأسلوب نحصل على دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير العشوائي المتقطع Y عندما $X=x$ معطى وهي:

$$g_2(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)} \qquad \text{.......(7-12)}$$

حيث $f_1(x)>0$.

نلاحظ أنّ كل من الدالتين $g_1(x/y)$ و $g_2(y/x)$ تحققان شروط دوال التوزيع الاحتمالي المتقطع وهي:

- $g_1(x/y)>0$ و $g_2(y/x)>0$.
- $\sum_{\forall x} g_1(x/y)=\frac{\sum_{\forall x} f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f_2(y)}{f_2(y)}=1$ كذلك فان :

$$\sum_{\forall y} g_2(y/x)=\frac{\sum_{\forall y} f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f_1(x)}{f_1(x)}=1$$

مثال 7-9

اذا كان الطلب الأسبوعي على المنتجين A و B ، الذي يباع في الأسواق ،لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة ، قيمها كما مبينة في الجدول أدناه.أحسب دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية لطلب المنتج A عندما يكون الطلب على المنتج B معطى وهو (1) وحدة،كذلك أحسب دالة التوزيع الاحتمالية التجميعية لطلب المنتج B عندما يكون الطلب على A هو (2) وحدة.

		A				
	x \ y	0	1	2	3	total
B	0	.05	.10	.15	.05	.35
	1	.10	.20	.10	.05	.45
	2	.05	.10	.05	.00	.20
	total	.20	.40	.30	.10	1.0

الحل

ليكن X متغيراً عشوائياً يمثل الطلب على المنتج A و Y متغير عشوائي يمثل الطلب على المنتج B.

ولتكن $g_1(x/y)$ تمثل دالة التوزيع الشرطي إلى X عندما $Y=y$ معطى و $g_2(y/x)$ تمثل دالة التوزيع الشرطي إلى Y عندما $X=x$ معطى.

نستخدم العلاقتين $(5-11)$ و $(5-12)$ لحساب دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية إلى X عندما يكون $Y=1$ وهي:

$$g_1(0/1)=f(0,1)/f_2(1)=(0.10)/(0.45)=0.22$$

$$g_1(1/1)=f(1,1)/f_2(1)=(0.20)/(0.45)=0.44$$

$$g_1(2/1)=f(2,1)/f_2(1)=(0.10)/(0.45)=0.22$$

$$g_1(3/1)=f(3,1)/f_2(1)=(0.05)/(0.45)=0.11$$

وبنفس الطريقة لحساب دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية إلى Y عندما يكون $X=2$ وهي:

$$g_2(0/2)=f(2,0)/f_1(2)=(0.15)/(0.30)=0.50$$

$$g_2(1/2)=f(2,1)/f_1(2)=(0.10)/(0.30)=0.33$$

$$g_2(2/2)=f(2,2)/f_1(2)=(0.05)/(0.30)=0.17$$

ولحساب دالة التوزيع التجميعية الشرطية كما يأتي:

لتكن $G_2(y/x)$ تمثل دالة التوزيع التجميعية الشرطية إلى Y عندما $X=2$ معطى فنحصل على:

$$G_2(0/2)=g_2(0/2)=0.50$$

$$G_2(1/2)=g_2(0/2)+g_2(1/2)=0.50+0.33=0.83$$

$$G_2(2/2)=g_2(0/2)+g_2(1/2)+g_2(2/2)=0.50+0.33+0.17=1.00$$

3-4-7 دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغيرات العشوائية المستمرة:

Conditional Probability Distribution Function Of Continuous Random Variables:

تعريف 7-8

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة (joint $p.d.f$) $f(x,y)$ ودالتي التوزيع الاحتمالي الهامشية (marginal $p.d.f$) $f_1(x)$ و $f_2(y)$ على التوالي حيث كلاهما تمثلان دوال موجبة فان :

$$g_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \quad \text{.....................................(7-13)}$$

حيث $f_2(y)>0$.

فإن $g_1(x/y)$ تسمى دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير العشوائي المستمر X عندما يكون المتغير العشوائي المستمر $Y=y$ معطى.

وبنفس الأسلوب نحصل على دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير العشوائي المستمر Y عندما $X=x$ معطى وهي:

$$g_2(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)} \quad \text{.....................................(7-14)}$$

حيث $f_1(x)>0$.

نلاحظ بان كل من الدالتين $g_1(x/y)$ و $g_2(y/x)$ تحققان شروط دوال التوزيع الاحتمالي المستمر وهي:

- $g_1(x/y)\geq 0$ و $g_2(y/x)\geq 0$.

○ $\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x/y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)dx}{f_2(y)} = \frac{f_2(y)}{f_2(y)} = 1$ كذلك فان :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(y/x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)dy}{f_1(x)} = \frac{f_1(x)}{f_1(x)} = 1$$

ملاحظة:

نلاحظ بان $\int_a^b g_1(x/y)dx$ يمثل الاحتمال $P(a \le X \le b / Y = y)$ وبما أن $P(Y = y) = 0$ في حالة المتغير العشوائي المستمر فأنه لايمكن لنا أن نستخدم طريقة التعريف السابقة في تعريف دالة الاحتمال الشرطي،ولكن على أية حال سنستخدم التكامل لتعريف هذه الاحتمالية.

مثال 7-10

ليكن (X,Y) متغيرين عشوائيين مستمرين لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة الآتية:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x^2 - 2\rho xy + y^2)}{1-\rho^2}\right\}$$

حيث أن $-\infty < x, y < \infty, |\rho| < 1$.

الحل

بما أن دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية إلى X هي:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} exp(-\frac{1}{2}x^2) \quad , -\infty < x < \infty$$

فان دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية إلى Y عندما $X = x$ معطى هي:

$$g(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{(2\pi)^{-1}(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2\rho xy + y^2)/(1-\rho^2)}}{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2/2}}$$

$$=\frac{1}{\left\{2\pi(1+\rho^2)\right\}^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(y-\rho x)^2/1-\rho^2)} \quad ,-\infty < y < \infty$$

وهذا يمثل توزيعاً طبيعياً بوسط مقداره (ρx) وتباين $(1-\rho^2)$.

5-7 المتغيرات العشوائية المستقلة Independent Random Variables

سبق وان ناقشنا فكرة الأحداث المستقلة في الفصل الثاني أثبتنا بان الحدثين A و B مستقلين إذا كان $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. وهنا سوف نتطرق إلى الاستقلالية في المتغيرات العشوائية، والتي سيكون لها دوراً مهما في دراساتنا المتقدمة وخاصة في مجال نظرية العينات.[2]

تعريف 7-9

ليكن كل من X و Y متغيرين عشوائيين . نقول بأنهما مستقلان (independent) إذا كان :

$$F(x,y)=F_1(x)F_2(y) \quad \text{.......................................(7-15)}$$

لكل قيم (x,y).

ولكي نبين بأن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلان ،نطبق النظرية الآتية والتي تسمح لنا باستخدام دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة بدلاً من دالة التوزيع التجميعية الواردة في التعريف (7-9) .

نظريه 7-2

لتكن $f(x,y)$ دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغيرين العشوائيين X و Y ولتكن $f_1(x)$ و $f_2(y)$ هما دالتين التوزيع الهامشي لكلٍ من X و Y على التوالي . فأن X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين اذا وإذا فقط كان:

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y) \quad \text{.......................................(7-16)}$$

لكل قيم x و y.

البرهان

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين مستقلين فان:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2\{F_1(x)F_2(y)\}}{\partial x\,\partial y}$$

$$=\frac{\partial F_1(x)}{\partial x}\frac{\partial F_2(y)}{\partial y}=f_1(x)f_2(y)$$

ولبرهان الاتجاه الآخر من النظرية نفرض بان العلاقة $(7-16)$ متحققة فان:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_1(u)f_2(v)dvdu$$

$$=\left\{\int_{-\infty}^{x}f(u)du\right\}\left\{\int_{-\infty}^{y}f(v)dv\right\}=F_1(x)F_2(y)$$

وهذا يعني بان X و Y متغيران عشوائيان مستقلان.

ملاحظة:

يمكن أن نبرهن بان المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين باستخدام دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية وكما يأتي:

إذا كانت كل من $g_1(x/y)$ و $g_2(y/x)$ تمثلان دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية إلى X عندما $Y=y$ معطى و Y عندما $X=x$ معطى وذلك على التوالي.

وبما أن تعريف دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية هو:

$$g_2(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)} \text{ و } g_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

فإن:

$$f(x,y)=f_2(y)g_1(x/y) \text{ و } f(x,y)=f_1(x)g_2(y/x) \quad \text{.........}\mathbf{(7\text{-}17)}$$

وبمقارنة العلاقة $(7-16)$ و $(7-17)$ نحصل على أن X و Y مستقلين اذا وإذا فقط كان:

$g_1(x/y)=f_1(x)$ و $g_2(y/x)=f_2(x)$ لكل القيم الحقيقية إلى x و y.

وهذا يعني بان لكل متغير عشوائي فـان التوزيـع الهامـشي والـشرطي يجـب أن يكونان متكافئان.

مثال11-7

لتكن دالة التوزيع التجميعية للمتغيرين العشوائيين المستمرين X و Y هي:

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)} & ,x,y\geq 0\\ 0 & ,elsewhere\end{cases}$$

- أحسب دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغيرين X و Y؟
- أحسب دالة التوزيع التجميعية للمتغيرين X و Y؟
- بين فيما اذا كان كل من X و Y مستقلين ام لا؟

الحل

من الدالة $F(x,y)$ نحصل على دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة وكما يأتي:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & ,x,y\geq 0\\ 0 & ,elsewhere\end{cases}$$

وبذلك فان دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية تكون:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}e^{-x} & ,x>0\\ 0 & ,elsewhere\end{cases}$$

و

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}e^{-y} & ,y>0\\ 0 & ,elsewhere\end{cases}$$

أما بالنسبة إلى دالة التوزيع التجميعية الهامشية فهي:

$$F_1(x) = F(x,\infty) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ 1-e^{-x} & ,x \geq 0 \end{cases}$$

و

$$F_2(y) = F(y,\infty) = \begin{cases} 0 & ,y < 0 \\ 1-e^{-y} & ,y \geq 0 \end{cases}$$

وبمـا أن $F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$ لجميـع قـيم x و y ،فـان المـتغيرين العشوائيين X و Y مستقلان(independent).وهذا يؤكد بان :

$f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ لجميع قيم x و y .

مثال 7-12

صندوق يحتوي على (20) شمعة عيد ميلاد (5) منها حمـراء ، (10) زرقـاء و(5) بيضاء. سحبت منها عينه تتكون من(5) شموع عشوائياً ، ولـيكن X يمثـل عـدد الشموع الحمراء و Y يمثل عدد الشموع الزرقاء المسحوبة .

- أحسب دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة بالنسبة إلى X و Y ؟
- أحسب دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية بالنسبة إلى Y ؟
- أحسب التوزيع الشرطي إلى X عندما $Y = y$ معطى ، أستخدم العلاقـة الآتيـة لحساب النتائج :

$\sum_{all} \binom{a}{x}\binom{b}{n-x} = \binom{a+b}{n}$ حيث أن $\binom{a}{n} = 0$ لجميع قـيم $x < a$ و a,b,n قـيم صحيحة موجبة وأن $n \leq a+b$.

الحل

عدد طرق اختيار عينة من الحجم (5) من (20) شمعة $= \binom{20}{5}$.

وإن جميع هذهِ الاختيارات العشوائية تكون متماثلة .

نفرض بأن العينة x هي شمعه حمراء ، y شمعه زرقاء فإن $5-x-y$ شمعةً بيضاء .

عدد طرق اختيار x شمعة حمراء من العينة $= \binom{5}{x}$.

عدد طرق اختيار y شمعة زرقاء من العينة $= \binom{10}{y}$.

عدد طرق اختيار $5-x-y$ شمعةً بيضاء من العينة $= \binom{5}{5-x-y}$.

ولأن اختيار الشموع الحمراء مرتبط مع كل اختيار لشمعة من الشموع الزرقاء والتي جميعها ترتبط مع كل اختيار من الشموع البيضاء فإن العدد الكلي للعينات الممكنة التي تحتوي شموعاً حمراء و زرقاء وبيضاء هو : $\binom{5}{x}\binom{10}{y}\binom{5}{5-x-y}$.

لذلك فإن دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة إلى X و Y هي :

$$f(x,y)=P(X=x,Y=y)=\frac{\binom{5}{x}\binom{10}{y}\binom{5}{5-x-y}}{\binom{20}{5}}$$

حيث أن $y\geq 0$ ، $x\geq 0$ ، $0\leq x+y\leq 5$.

ودالة التوزيع الاحتمالي الهامشي بالنسبة إلى Y هي :

$$f_2(y)=\sum_{x=0}^{5-y}\frac{\binom{5}{x}\binom{10}{y}\binom{5}{5-x-y}}{\binom{20}{5}}$$

حيث أن $0\leq y\leq 5$.

ودالة التوزيع الاحتمالي الهامشي بالنسبة إلى X هي:

$$f_1(x) = \sum_{y=0}^{5-x} \frac{\binom{5}{x}\binom{15}{5-x}}{\binom{20}{5}}$$

حيث أن $0 \le x \le 5$.

ولحساب دالة التوزيع الشرطية بالنسبة إلى X عندما $Y = y$ معطى فتكون:

$$g_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\binom{5}{x}\binom{5}{5-x-y}}{\binom{10}{5-y}}$$

حيث أن $0 \le x \le 5-y, 0 \le y \le 5$.

تمرين:

اثبت من خلال مثال(7-8)بان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين ؟

7-6 التوقع للدوال ذات المتغيرين العشوائيين

Expectations Of Functions Of Pairs Of Random Variables

في هذه الوحدة سنوسع مفهوم التوقع لكي يشمل التوقع للمتغيرين العشوائيين،وسنتناوله من خلال بعض الأمثلة الآتية:

مثال7-13

رمي حجر نرد مرتين،فإذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغيرين X و Y تعتمد على نتائج الرميات ،حيث انه اذا كان كلا العددين زوجيين وغير متساويين أو فرديين وغير متساويين فإننا نحصل على مجموع هذين العددين،أما اذا كان احد الأعداد فردي والآخر زوجي فنحصل على مجموع سالب للعددين،وإذا كان العددان فرديين ومتساويين فنحصل على القيمة المشتركة التي تمثل العددين ،

وإذا كان العددان زوجيين ومتساويين فنحصل على القيمة المشتركة السالبة لهما. وبذلك يمكن تكوين دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة وكما يأتي:

ليكن كل من X و Y متغيرين عشوائيين الأول يمثل نتائج الرمية الأولى لحجر النرد والثاني يمثل نتائج الرمية الثانية .اذا فرضنا بان U يمثل دالة لهذين المتغيرين العشوائيين X و Y ونرمز لها بالرمز $U(X,Y)$ فإنها تعرف بالشكل الآتي:

$$U(X,Y)=\begin{cases} X+Y \quad if \quad X\neq Y and \quad X,Y are \quad both \quad even \quad or \quad odd \\ -(X+Y) \quad if \quad X \quad is \quad odd \quad and \quad Y \quad is \quad even \quad or \quad op. \\ X \quad if \quad X=Y \quad and \quad X \quad is \quad odd \\ -X \quad if \quad X=Y \quad and \quad X \quad is \quad even \end{cases}$$

وتكون القيم الممكنة إلى (x,y) بالنسبة إلى (X,Y) كما في الجدول أدناه:

x \ y	1	2	3	4	5	6
1	1	-3	4	-5	6	-7
2	-3	-2	-5	6	-7	8
3	4	-5	3	-7	8	-9
4	-5	6	-7	-4	-9	10
5	6	-7	8	-9	5	-11
6	-7	8	-9	10	-11	-6

وإذا اعتبرنا U متغير عشوائي بحد ذاته فان التوزيع الاحتمالي له نحصل علية من الجدول أعلاه، فمثلا هناك (4) قيم من (36) قيمة تحمل الرقم (5-)

فإن $P(U=-5)=\frac{4}{36}$ وعلية يمكن إيجاد جميع قيم الاحتمالات الممكنة والتي تكون متماثلة باحتمال $\frac{1}{36}$ (equally likely) وكما يأتي:

$U:$	-11	-9	-7	-6	-5	-4	-3	-2	1	3	4	5	6	8	10
p $(U=u)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

وهناك طريقتان لحساب التوقع بالنسبة للمتغير العشوائي U وكما يلي:

$$E(U) = \sum_{all\ u} UP(U=u) = -11\left(\frac{2}{36}\right) + (-9)\left(\frac{4}{36}\right) + \ldots + 10\left(\frac{2}{36}\right) = -\frac{5}{4}$$

أو نتعامل مع U كدالة إلى X و Y فنحصل على:

$$E(U) = 1\left(\frac{1}{36}\right) + (-3)\left(\frac{1}{36}\right) + \ldots + (-6)\left(\frac{1}{36}\right) = -\frac{5}{4}$$

وان الفائدة من الطريقة الثانية تجعلنا نستطيع أن نتعامل مع دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة إلى X و Y دون الحاجة لاشتقاق توزيع احتمالي بالنسبة إلى U، والنظرية أدناه توضح ذلك.

نظرية 7-3

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ثنائي له دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة $f(x,y)$ إذا كان $U=u(X,Y)$ دالة إلى (X,Y)، فان التوقع (expected) للقيمة U، إذا وجد فيعطى بالصيغة الآتية:

$$E(U) = E\{u(X,Y)\} = \sum_{(x,y)\in R_{X,Y}} \sum u(x,y)f(x,y) \quad \ldots\ldots(7\text{-}18)$$

في حالة المتغير العشوائي المتقطع.

أما في حالة المتغير العشوائي المستمر فيعطى بالصيغة الآتية:

$$E(U) = E\{u(X,Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)f(x,y)\,dx\,dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{-}19)$$

نظرية 7-4

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ثنائي له دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة $f(x,y)$ وان $U=a_1X+a_2Y$ فان التوقع الى U:

$$E(U) = a_1 E(X) + a_2 E(Y) \quad \text{.....................................(7-20)}$$

والتباين الى U هو:

$$var(U) = a_1^2 \ \ var(X) + a_2^2 \ \ var(Y) + 2a_1 a_2 cov(X,Y) \quad \text{......(7-21)}$$

حيث أن $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ يسمى التغاير(covariance) للمتغيرين X و Y.

البرهان

لبرهان العلاقة (20 – 7) نضع :

$g(x,y) = a_1 x + a_2 y$ وباستخدام العلاقة (19 – 7) فان:

$$E(U) = E(a_1 X + a_2 Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(a_1 x + a_2 y)f(x,y)dxdy$$

$$= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$$

وبما أن $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = f_1(x)$ و $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = f_2(y)$ فان:

$E(U) = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)$ حيث أن $f_1(x), f_2(y)$ هما الدوال الهامشية للمتغيرين العشوائيين X و Y، وبما أن $\int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx = E(X)$ وان $\int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)dy = E(Y)$ ، وبالتعويض عن هذين التكاملين أعلاه نحصل على:

$$E(U) = a_1 E(X) + a_2 E(Y)$$

ولبرهان العلاقة(7-21) أعلاه نضع:

$$U^2 = (a_1 X + a_2 Y)^2 = a_1^2 X^2 + a_2^2 Y^2 + 2a_1 a_2 XY$$

وباستخدام العلاقة (7-19) ووضع:

$$g(x,y) == a_1^2 x^2 + a_2^2 y^2 + 2a_1 a_2 xy$$

فإننا نحصل على:

$$E(U^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(a_1^2x^2 + a_2^2y^2 + 2a_1a_2xy)f(x,y)dxdy$$

$$= a_1^2\int_{-\infty}^{\infty}x^2\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dydx + a_2^2\int_{-\infty}^{\infty}y^2\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy$$

$$+2a_1a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$$

$$= a_1^2\int x^2f_1(x)dx + a_2^2\int y^2f_2(y)dy + 2a_1a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$$

$$= a_1^2E(X^2) + a_2^2E(Y^2) + 2a_1a_2E(XY)$$

وبما أن :

$$var(U) = E(U^2) - \{E(U)\}^2$$

$$= a_1^2\left[E(X^2) - \{E(X)\}^2\right] + a_2^2\left[E(Y^2) - \{E(Y)\}^2\right]$$

$$+2a_1a_2\left[E(XY) - E(X)E(Y)\right]$$

$$var(U) = a_1^2\ var(X) + a_2^2\ var(Y) + 2a_1a_2cov(X,Y)$$

ملاحظة:

هناك حالتان مهمتان يجب الإشارة إليهما:

1. اذا كانت $a_1 = a_2 = 1$ فان $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ و...

$$var(X+Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X,Y) \quad ....(7\text{-}22)$$

2. إذا كانت $a_1 = 1, a_2 = -1$ فان $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$ و...

$$var(X-Y) = var(X) + var(Y) - 2cov(X,Y) \quad ....(7\text{-}23)$$

مثال 7-14

نظام الكتروني يتكون من عدة مكونـات ،وهـذه المكونـات تخـضع للعطـل عنـد العمل لذلك ترتبط بمكونات احتياطية تحل محلها حالاً في حالـة تعرضـها للعطـل

وتعمل كبديل عنها مباشرةً ، ولهذا يمكن أن نمثل استمرارية العمل للنظام(بقاء النظام) بالمتغير $T = X + Y$، حيث أن X يمثل مكونات النظام و Y يمثل المكونات الاحتياطية .اذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين ومستقلين ولهما دالتي التوزيع الاحتمالي $\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ و $\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ على التوالي حيث أن $0 < x , y < \infty$ ، أحسب متوسط البقاء والتباين للنظام؟

الحل

نلاحظ بان كل من الدوال الهامشية $f_1(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ و $f_2(y) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$ هي دوال أُسية بمعالم λ_1 و λ_2 حيث سبق وان حسبنا:

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda_1}$ و $E(Y) = \dfrac{1}{\lambda_2}$ وكذلك $var(X) = \dfrac{1}{\lambda_1^{2}}$ و $var(Y) = \dfrac{1}{\lambda_2^{2}}$.

إذن نحصل على متوسط بقاء النظام :

$E(T) = E(X) + E(Y) = \dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2}$، وبما أن المتغيرين X و Y مستقلين فان دالة التوزيع التجميعية المشتركة لهما هي:

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) = (\lambda_1 e^{-\lambda_1 x})(\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 x + \lambda_2 y)}, x, y > 0$$

كذلك فان:

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_0^\infty xy\, \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} dx dy$$

$$= \left\{ \int_0^\infty x\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \right\} \left\{ \int_0^\infty y\, \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy \right\} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_2}$$

وبما أن $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

فانه بالتعويض عن قيم $E(XY)$ ، $E(X)$ و $E(Y)$ نحصل على أن:

$cov(X,Y) = 0$.

وعلية يكون حساب التباين للنظام هو:

$$var(T) = var(X) + var(Y) + 2\,cov(X,Y)$$

$$= \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + 0 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}$$

من خلال المثال أعلاه يمكن وضع الاستنتاج الآتي بصيغة نظرية.

نظرية 7-5

ليكن كل من X و Y متغيرين عشوائيين لهما دالة التوزيع المشتركة $f(x,y)$. اذا كان X و Y مستقلين فان:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

البرهان

اذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين فان:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_1(x)f_2(y)dxdy$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)dy \right\} = E(X)E(Y)$$

ويمكن البرهان في حالة المتغيرين العشوائيين X و Y متقطعين بالأسلوب نفسه.

ملاحظة:

اذا كان X و Y مستقلين فان $\text{cov}(X,Y) = 0$ ، لذلك نستنتج من العلاقتين $(7-22)$ و $(7-23)$ بان:

$$var(X+Y) = var(X-Y) = var(X) + var(Y) \quad ....(7\text{-}24)$$

7-7 العزوم الثنائية Bivariate Moments

سوف نوضح في هذه الفقرة مفهوم العزم الأحادي لمتغير واحد إلى العزوم الثنائية ودوالها المولدة للعزوم،حيث أن هذه الدوال تعطينا فكرة جيدة عن بعض الخواص المهمة للتوزيعات المرتبطة بها ،وسوف ندرس إحدى هذه الخواص المهمة وهي مفهوم الارتباط بين المتغيرين العشوائيين.

تعريف 7-10

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ثنائي له دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة $f(x,y)$ ، فان العزم الثنائي (bivariate moment) من الرتبة (r,s)

للمتغير (X,Y) حول نقطة الأصل ، اذا وجد،فيعرف كما يأتي:[2]

$$E(X^rY^s)=\sum_{(x,y)\in R_{X,Y}}\sum x^ry^sf(x,y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{-}25)$$

في حالة كون المتغير العشوائي الثنائي (X,Y) من النوع المتقطع.

أما في حالة كون المتغير العشوائي (X,Y) من النوع المستمر فان العزم الثنائي يعرف كمايلي:

$$E(X^rY^s)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^ry^sf(x,y)dxdy\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{-}26)$$

إن العزم الثنائي حول نقطة الأصل $\mathrm{E}(X^r,Y^s)$ سوف نرمز له بالرمز $\mu'_{r,s}$ وهو يشير إلى العزم المختلط للتوزيع(mixed moment) من الرتبة (r,s) .

اذا كان $s=0$ فان $\mathrm{E}(X^r)=\mu'_{r,0}$ يسمى العزم r حول نقطة الأصل للتوزيع الهامشي X.

وإذا كان $r=0$ فان $\mathrm{E}(Y^s)=\mu'_{0,s}$ يسمى العزم s حول نقطة الأصل للتوزيع الهامشي Y.

وبشكل محدد يمكن أن نعبر عن $\mu'_{1,0}$ و $\mu'_{0,1}$ بأنهما يمثلان المتوسطان للتوزيعات الهامشية بالنسبة إلى X و Y على التوالي.

وكما لاحظنا في حالة المتغير العشوائي الواحد يكون من المفيد العمل حول المتوسطات، ولهذا سوف نستخدم هذه المتوسطات لتعريف العزم المركزي الثنائي بالشكل الآتي:

$$\mu_{r,s}=E\left[\{X-E(X)\}^r\{Y-E(Y)\}^s\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{-}27)$$

$$\mu_{r,s} = \sum_{(x,y)\in R_{X,Y}} \sum (x-\mu'_{1,0})^r (y-\mu'_{0,1})^s f(x,y) \qquad \text{(7-28)}$$

في حالة المتغير العشوائي الثنائي المتقطع.

أما في حالة المتغير العشوائي الثنائي المستمر فيعرف بالشكل الآتي:

$$\mu_{r,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu'_{1,0})^r (y-\mu'_{0,1})^s f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{(7-29)}$$

عندما $r = s = 1$ فإننا نحصل على:

$$\mu_{1,1} = E\left[\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}\right]$$
$$= E(XY) - E\{Y\,E(X)\} - E\{X\,E(Y)\} + E\{E(X)E(Y)\}$$

وبما أن كل من $E(X)$ و $E(Y)$ ثوابت فان:

$$\mu_{1,1} = E(XY) - E(Y)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

$$\mu_{1,1} = E(XY) - E(Y)E(Y))$$
$$= cov(X,Y) \qquad \text{(7-30)}$$

وهذا يمثل التغاير(covariance) بين X و Y.

ويمكن لنا أن نعبر عن العزم المركزي $\mu_{r,s}$ باستخدام العزوم الثنائية حول نقطة الأصل $\mu'_{r,s}$. وعليه سوف نستخدم التوسيع الثنائي الحدين في العلاقة $(7-29)$ للحصول على العلاقة الآتية:

$$\mu_{r,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i x^{r-i}\mu'^{\,i}_{1,0}\right\}\left\{\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}(-1)^j y^{s-j}\mu'^{\,j}_{0,1}\right\} f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\binom{r}{i}\binom{s}{j}(-1)^{i+j}\mu'^{\,i}_{1,0}\mu'^{\,j}_{0,1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^{r-i}y^{s-j} f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\binom{r}{i}\binom{s}{j}(-1)^{i+j}\mu'^{\,i}_{1,0}\mu'^{\,j}_{0,1}\mu'_{r-i,s-j} \qquad \text{(7-31)}$$

وعلى سبيل المثال اذا فرضنا أن $r = s = 1$ سنحصل على:

$\mu_{1,1} = \mu'_{1,1} - \mu'_{1,0}\mu'_{0,1}$ وهكذا اذا فرضنا أن $r = 2, s = 1$ فسنحصل على:

$$\mu_{2,1} = \mu'_{2,1} - \mu'_{2,0}\mu'_{0,1} - 2\mu'_{1,1}\mu'_{1,0} + 2\mu'^{2}_{1,0}\mu'_{0,1}$$

تعريف 7-11

اذا كان كل من X و Y متغيرين عشوائيين لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة $f(x,y)$ فان دالة العزم المولدة المشتركة(Joint Moment Generating Function) لهما في حالة كونهما مستمرين هي:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x+t_2y} f(x,y)\,dxdy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{-}32)$$

حيث أن $|t_1| < h_1$ و $|t_2| < h_2$ ،وان h_1 و h_2 قيم ثابتة موجبة.

أما في حالة كون المتغيرين العشوائيين X و Y متقطعين فان دالة العزم المولدة المشتركة لهما هي:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \sum_{(x,y)\in R_{X,Y}}\sum e^{t_1x+t_2y} f(x,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{-}33)$$

حيث أن $|t_1| < h_1$ و $|t_2| < h_2$ ،وان h_1 و h_2 قيم ثابتة موجبة.

إن التعريف أعلاه يبين لنا بان $M_{X,Y}(t_1,t_2) = E(e^{t_1x+t_2y})$ إذا كان التوقع موجوداً.وعليه يمكن أن نبين بان دالتي العزم الهامشية المولدة هما:

$M_{X,Y}(t_1,0) = M_X(t_1)$ و $M_{X,Y}(0,t_2) = M_Y(t_2)$ للمتغيرين X و Y على التوالي.وكذلك يمكن لنا أن نلاحظ بأنه من خلال استخدام الاشتقاق الجزئي لجميع الرتب عند $t_1 = t_2 = 0$ في حالة وجود دالة العزم $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ وكما يأتي:

$$\frac{\partial^{r+s} M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{\,r}\partial t_2^{\,s}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s e^{t_1x+t_2y} f(x,y)\,dxdy$$

في حالة $t_1 = t_2 = 0$ فان $e^{t_1x+t_2y} = 1$ وعليه يكون:

$$\left\{\frac{\partial^{r+s} M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{\,r}\partial t_2^{\,s}}\right\}_{t_1=t_2=0} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f(x,y)\,dxdy = \mu'_{r,s} \quad \ldots.(7\text{-}34)$$

في حالة المتغير العشوائي المستمر.

وبالأسلوب نفسه نستنتج بأنه في حالة المتغير العشوائي المتقطع فان:

$$\left\{ \frac{\partial^{r+s} M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{\,r} \partial t_2^{\,s}} \right\}_{t_1=t_2=0} = \sum_{(x,y)\in R_{X,Y}} \sum x^r y^s f(x,y) = \mu'_{r,s} \quad ...(7\text{-}35)$$

وفيما يأتي مثال على متغيرين عشوائيين مستمرين.

مثال 7-15

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة الآتية:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, 0 < x < y < \infty \\ 0, \quad elsewher \end{cases}$$

إحسب ما يأتي:

- دالة العزم المولدة المشتركة بالنسبة إلى X و Y ؟
- دالتي العزم المولدة الهامشية؟
- التغاير والتباين لكل من X و Y ؟

الحل

دالة العزم المولدة المشتركة تحسب كما يأتي:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \int_0^\infty \int_x^\infty e^{(t_1 x + t_2 y)} e^{-y} dy dx = \int_0^\infty \int_x^\infty e^{(t_1 x + t_2 y - y)} dy dx$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{(t_2 - 1)} e^{(t_1 x + t_2 y)} \right\}_x^\infty dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\left\{ \frac{1}{(t_2 - 1)} e^{(t_1 x + t_2 \infty - \infty)} \right\} - \left\{ \frac{1}{(t_2 - 1)} e^{(t_1 x + t_2 x - x)} \right\} \right) dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{(1 - t_2)} e^{x(t_1 + t_2 - 1)} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x(1 - t_1 - t_2)}}{1 - t_2} dx$$

$$= \frac{e^{-x(1 - t_1 - t_2)}}{-(1 - t_2)(1 - t_1 - t_2)} \Bigg|_0^\infty$$

وبعد إجراء التعويض بحدود التكامل نحصل على:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2)=\frac{1}{(1-t_2)(1-t_1-t_2)}$$

وهي تمثل دالة العزم المولدة المشتركة.

ولحساب دالة العزم المولدة الهامشية فان من الدالة اعلاه يكون:

$M_X(t_1)=M_{X,Y}(t_1,0)=\dfrac{1}{(1-t_1)}\quad ,t_1<1$ دالـة العـزم الهامـشية إلى X

$M_Y(t_2)=M_{X,Y}(0,t_2)=\dfrac{1}{(1-t_2)^2}\quad ,t_2<1$ دالة العـزم الهامـشية إلى Y وبأخـذ المشتقة الأولى والثانية بالنسبة إلى t_1 و t_2 للدالتين أعلاه نحصل:

$$\frac{\partial M_X(t_1)}{\partial t_1}=\frac{1}{(1-t_1)^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 M_X(t_1)}{\partial t_1^{\,2}}=\frac{2}{(1-t_1)^3}$$

$$\frac{\partial M_Y(t_2)}{\partial t_2}=\frac{2}{(1-t_2)^3} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 M_Y(t_2)}{\partial t_2^{\,2}}=\frac{6}{(1-t_2)^4}$$

كذلك نأخذ المشتقة الثانية لدالة العزم المولدة المشتركة أي أن :

$$\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\frac{3-3t_2-t_1}{(1-t_2)^2(1-t_1-t_2)^3}$$

وبعد التعويض في قيم المشتقات أعـلاه عـن قـيم t_1 و t_2 كـل حـسب مـشتقتها نحصل على ما يأتي:

$$\frac{\partial M_X(t_1)}{\partial t_1}=\mu'_{1,0}=\frac{1}{(1-t_1)^2}=\frac{1}{(1-0)^2}=1=E(X)$$

$$\frac{\partial M_Y(t_2)}{\partial t_2}=\mu'_{0,1}=\frac{2}{(1-t_2)^3}=\frac{2}{(1-0)^3}=2=E(Y)$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t_1)}{\partial t_1^{\,2}}=\mu'_{2,0}=\frac{2}{(1-t_1)^3}=\frac{2}{(1-0)^3}=2=E(X^2)$$

$$\frac{\partial^2 M_Y(t_2)}{\partial t_2^{\,2}}=\mu'_{0,2}=\frac{6}{(1-t_2)^4}=\frac{6}{(1-0)^4}=6=E(Y^2)$$

$$\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \mu'_{1,1} = \frac{3-3t_2-t_1}{(1-t_2)^2(1-t_1-t_2)^3}\Bigg|_{t_1=t_2=0}$$

$$= \frac{3-0-0}{(1-0)^2(1-0-0)^3} = 3 = E(XY)$$

وبذلك نستطيع حساب التغاير إلى X و Y كما يأتي:

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3 - 1(2) = 1$$

ولحساب التباين لكل من X و Y فان:

$$var(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 2 - \{1\}^2 = 1$$

$$var(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = 6 - \{2\}^2 = 2$$

سنثبت نظرية مهمة جداً تربط دالة العزم المولدة المشتركة بمفهوم الاستقلالية للمتغيرات العشوائية.

نظرية 6-7

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة $f(x,y)$ ودالتي التوزيع الهامشية $f_1(x)$ و $f_2(y)$ على التوالي، ولتكن $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ تمثل دالة العزم المولدة المشتركة للتوزيع. فان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين اذا وإذا فقط كان:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = M_{X,Y}(t_1,0)\,M_{X,Y}(0,t_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7\text{-}36)$$

البرهان

نفرض أن X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = E(e^{t_1X+t_2Y}) = E(e^{t_1X})\,E(e^{t_2Y})$$

$$= M_{X,Y}(t_1,0)\,M_{X,Y}(0,t_2)$$

وهذا يعني انه اذا كان كل من X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان دالة العزم المولدة المشتركة يمكن تحليلها إلى حاصل ضرب دالتي العزم المولدة الهامشية .

ولبرهان الاتجاه الآخر نفرض أن دالة العـزم المولـدة المـشتركة تكتـب بالـشكل الآتي:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = M_{X,Y}(t_1,0)\,M_{X,Y}(0,t_2)$$

في حالة كون X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين فان كل واحد منهما لـه دالـة عزم مولدة وحيدة وكما يأتي:

$$M_{X,Y}(0,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2 y} f_2(y)\,dy \quad \text{و} \quad M_{X,Y}(t_1,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x} f_1(x)\,dx$$

وبالتعويض عن هاتين الدالتين في دالة العزم المولدة المشتركة نحصل على:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy$$

وبما أن $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ هي دالة العـزم المولـدة المـشتركة فإنهـا حـسب التعريـف تكون:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{....................(7-37)}$$

وعلية من وحدانية دالة العزم المولدة المشتركة نحصل على:

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) \quad \text{....................................(7-38)}$$

لجميع قيم x و y .

وهذا يؤدي إلى أن X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين.

مثال 7-16

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين متقطعين لهما دالة التوزيـع الاحتمـالي المـشتركة الآتية:

x \ y	-1	0	1	2
-2	0	$\frac{1}{6}$	0	0
-1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0

إحسب ما يأتي:

- دالة العزم المولدة المشتركة إلى X و Y؟
- دالتي العزم المولدة الهامشية؟
- التغاير بالنسبة إلى X و Y؟

الحل

نحسب دالة العزم المولدة المشتركة وكمايلي:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2)=\frac{1}{6}e^{-2t_1}+\frac{1}{3}e^{-(t_1+t_2)}+\frac{1}{6}e^{2t_2-t_1}+\frac{1}{6}e^{-t_2}+\frac{1}{6}e^{t_2}$$

ولحساب دالتي العزم الهامشية:

$$M_{X,Y}(t_1,0)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}e^{-t_1}+\frac{1}{6}e^{-2t_1}$$

$$M_{X,Y}(t_1,0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}e^{-t_2}+\frac{1}{6}e^{t_2}+\frac{1}{6}e^{2t_2}$$

ولحساب التغاير فان:

$$\frac{\partial M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1}=-\frac{1}{3}e^{-2t_1}-\frac{1}{3}e^{-(t_1+t_2)}-\frac{1}{6}e^{2t_2-t_1}$$

$$\frac{\partial M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_2}=-\frac{1}{3}e^{-(t_1+t_2)}+\frac{1}{3}e^{2t_2-t_1}-\frac{1}{6}e^{-t_2}+\frac{1}{6}e^{t_2}$$

$$\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\frac{1}{3}e^{-(t_1+t_2)}-\frac{1}{3}e^{2t_2-t_1}$$

وبوضع $t_1 = t_2 = 0$ نحصل على :

$$\mu'_{1,0} = \left[\frac{\partial M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right]_{t_1=t_2=0} = -\frac{5}{6}$$

$$\mu'_{0,1} = \left[\frac{\partial M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right]_{t_1=t_2=0} = 0$$

$$\mu'_{1,1} = \left[\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right]_{t_1=t_2=0} = 0$$

وعليه فان التغاير يكون:

$$cov(X,Y) = \mu'_{1,1} - \mu'_{1,0}\mu'_{0,1} = 0$$

وبما ان $M_{X,Y}(t_1,t_2) \neq M_{X,Y}(t_1,0)M_{X,Y}(0,t_2)$ فان X و Y غير مستقلين.

ملاحظة:

من المثال السابق نلاحظ بان التغاير يساوي صفر وبالرغم من ذلك نلاحظ أن المتغيرين العشوائيين X و Y ليس مستقلين،مما يدل على انه إذا كان المتغيرين العشوائيين مستقلين فان التغاير لهما يساوي صفراً ولكن العكس ليس صحيح.

8-7 معامل الارتباط The Correlation Coefficient

سنثبت في هذه الفقرة مقياس مهم من المقاييس التي توضح العلاقة بين المتغيرات العشوائية التي سبق وان درسنا بعض تفاصيلها،وهذه العلاقة تسمى (معامل الارتباط)وهي توضح لنا مدى العلاقة الخطية بين المتغيرين العشوائيين X و Y .ولذلك سوف نقدم تعريفا لهذا المعامل ومن ثم نشتق بعض الخواص المتعلقة به.

تعريف 7-12

معامل الارتباط بين المتغيرين العشوائيين X و Y يرمز له بالرمز $\rho_{X,Y}$ ويعرف بالصيغة التالية:[2]

$$\rho_{X,Y}=\frac{E\left[\{X-E(X)\}\{Y-E(Y)\}\right]}{\{var(X)\,var(Y)\}^{1/2}}=\frac{cov(X,Y)}{\{var(X)\,var(Y)\}^{1/2}}\quad\ldots(7-39)$$

حيــث أن $cov(X,Y)$ و $var(X)$ و $var(Y)$ موجــودة وان $var(X)>0$ و $var(Y)>0$.

ويسمى أحيانا بمعامل ارتباط بيرسون(Pearson) ولتبسيط التعامل معه نرمز لـه بالرمز ρ ،ولدراسة هـذا المعامـل ومعرفـة حقيقـة مايقيـسه سـوف نتطـرق إلى بعـض الخواص المهمة له من خلال النظريات الآتية.

نظرية 7-7

اذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مـستقلين ، فـان $\rho=0$ ويقـال عـن المـتغيرين بأنهما غير مرتبطين.

البرهان

من العلاقة $(7-39)$ والنظرية $(7-5)$ وبما أن X و Y متغيرين عشوائيين مـستقلين فان $cov(X,Y)=0$ وعلية فان $\rho=0$.

ولابد من التأكيد بان العكس لهذه النظرية ليس صحيحاً بشكل عام،وذلك لأننـا يمكن أن نحصل على $\rho=0$ ولكن المتغيرين العشوائيين ليس مستقلين.(المثال 7-16)يوضح ذلك.

نظرية 7-8

لأي متغيرين عشوائيين X و Y فان معامل الارتباط ، اذا وجد، فتكون له القيمـة بين -1 و 1 وبعبارة أخرى يكون $-1\le\rho\le1$.

البرهان

نفرض أن:

$$U=X-E(X)$$
$$V=Y-E(Y)$$

وان $\rho=\dfrac{E(UV)}{\{E(U^2)\,E(V^2)\}^{1/2}}$.

ولتكن الدالة التربيعية الآتية بالنسبة للمتغير t هي:

$$z(t)=E\{(U+tV)^2\}=E(U^2)+2tE(UV)+t^2E(V^2)\ ......(7\text{-}40)$$

من الواضح بان $z(t)\geq 0$ لجميع قيم t .

وإذا اعتبرنا الدالة التربيعية $z(t)=at^2+bt+c\geq 0$ لجميع قيم t. اذا كان $z(t)\geq 0$ لجميع قيم t، اذا كان المقدار $b^2-4ac\leq 0$ فانه لا يعطي حل حقيقي، وإذا لا فنحصل على جذرين حقيقيين للمعادلة $z(t)=0$.

وفي حالة $z(t)<0$ لبعض قيم t. نضع:

$$a=E(V^2),b=2E(UV),c=E(U^2)$$

فنحصل على:

$$\{2E(UV)\}^2-4E(V^2)E(U^2)\leq 0.$$

أي أن:

$$4\{E(UV)\}^2\leq 4E(V^2)E(U^2)$$

وبالقسمة على $E(V^2)E(U^2)$ نحصل على:

$$\frac{\{E(UV)\}^2}{E(V^2)E(U^2)}=\frac{\{E[X-E(X)][Y-E(Y)]\}^2}{E(V^2)E(U^2)}\leq 1$$

وبأخذ الجذر ألتربيعي للبسط والمقام نحصل على:

$$\frac{\{E(UV)\}}{\{\ E(V^2)E(U^2)\ \}^{1/2}}=\frac{\{E[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}{\{\ E(V^2)E(U^2)\ \}^{1/2}}=\rho^2\leq 1$$

ومنها نحصل على: $-1\leq\rho\leq 1$.

وهذا يبين بان قيم معامل الارتباط تقع بين 1-و1، ولكن المهم لنا هو ماذا يعني وقوع القيم ضمن هذا المدى ويجب ان نحصل على تفسير لذلك.

نظرية 7-9

اذا كان X و Y متغيرين عشوائيين وان $Y=\alpha+\beta X$ حيث ان α و β قيم حقيقية و $(\beta \neq 0)$،فان:

$\rho=1$ اذا كان $\beta>0$ و $\rho=-1$ اذا كان $\beta<0$.

البرهان

بما أن $Y=\alpha+\beta X$ فان $E(Y)=\alpha+\beta E(X)$

وان $var(Y)=\beta^2 var(X)$.

كذلك فان :

$$E(XY)=E\{X(\alpha+\beta X)\}=\alpha E(X)+\beta E(X^2)$$

وبما أن:

$$\rho=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\{var(X)var(Y)\}^{1/2}}$$

$$=\frac{\alpha E(X)+\beta E(X^2)-E(X)\{\alpha+\beta E(X)\}}{\{var(X)\beta^2 var(X)\}^{1/2}}$$

$$=\frac{\beta\left[E(X^2)-\{E(X)\}^2\right]}{\left[\beta^2\{var(X)\}^2\right]^{1/2}}=\frac{\beta}{|\beta|} \qquad \text{(7-41)}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا بان $\rho=1$ اذا كان $\beta>0$ و $\rho=-1$ اذا كان $\beta<0$.

إن النظرية أعلاه تثبت لنا بأنه اذا كان للمتغيرين العشوائيين علاقة خطية تامة فان قيمة معامل الارتباط تكون ± 1، وان العكس لها هو أيضا صحيح ، أي أن اذا كان $\rho=\pm 1$ فان للمتغيرين علاقة خطية يرتبطان بها، أي أن $Y=\alpha+\beta X$.

كما نلاحظ بأنه اذا كان المتغيرين العشوائيين مستقلين فان معامل الارتباط يساوي صفراً ،وهذا يمثل متوسط القيمة المحسوبة لقيم النهايات التي يأخذها معامل الارتباط.

مثال 7-17

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة الآتية:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}\left\{1+\theta(2e^{-x}-1)(2e^{-y}-1)\right\}, & x,y\geq 0,|\theta|<1 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

أحسب مايلي:

- دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية إلى X و Y ؟
- المتوسط والتباين للمتغيرين X و Y ؟
- معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y ؟

الحل

لحساب الدالة الهامشية بالنسبة إلى المتغير X :

$$f_1(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy=\int_0^\infty\left\{e^{-(x+y)}\left[1+\theta(2e^{-x}-1)(2e^{-y}-1)\right]\right\}dy$$

$$=e^{-x}\left\{\int_0^\infty e^{-y}dy+\theta(2e^{-x}-1)\int_0^\infty(2e^{-2y}-e^{-y})dy\right\}=e^{-x},x>0$$

وهذا يمثل التوزيع الأسي القياسي حيث أن:

$$E(X)=var(X)=1$$

وبنفس الأسلوب نحصل على دالة التوزيع الهامشية بالنسبة للمتغير Y وهي:

$$f_2(y)=\int_0^\infty f(x,y)dx=\int_0^\infty\left\{e^{-(x+y)}\left[1+\theta(2e^{-x}-1)(2e^{-y}-1)\right]\right\}dx$$

$$=e^{-y}\left\{\int_0^\infty e^{-x}dx+\theta(2e^{-y}-1)\int_0^\infty(2e^{-2x}-e^{-x})dx\right\}=e^{-y},y>0$$

ومنه نحصل على:

$$E(Y)=var(Y)=1$$

وكذلك فان:

$$E(XY)=\int_0^\infty\int_0^\infty xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}xdx\int_0^\infty e^{-y}ydy+\theta\int_0^\infty x(2e^{-2x}-e^{-x})dx\int_0^\infty y(2e^{-2y}-e^{-y})dy$$

$$E(XY)=(1)(1)+\theta(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})=1+\frac{1}{4}\theta$$

ومن العلاقة (39 – 7) وبما أن:

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=(1+\frac{1}{4}\theta)-(1)(1)=\frac{1}{4}\theta$$

وعليه فان معامل الارتباط هو:

$$\rho=\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\{var(X)var(Y)\}^{1/2}}=\frac{\frac{1}{4}\theta}{1}=\frac{1}{4}\theta$$

وبما أن $|\theta<1|$ فان $-\frac{1}{4}<\rho<\frac{1}{4}$.

ملاحظة:

في حالة التعامل مع معامل الارتباط كمعامل لعينة من المجتمع ، فاننا نفرض بان لدينا المشاهدات الآتية:

$(x_1,y_1),(x_2,y_2),......(x_n,y_n)$ وهي تمثل مشاهدات مستقلة للمتغير العشوائي (X,Y).

اذا كان:

$$s_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \quad و \quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \quad و \quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

وان: $s_y{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ و $s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

وعلية يمكن تعريف معامل الارتباط للعينة كما يأتي:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \quad \text{.......................................(7-42)}$$

حيث أن $s_x = \sqrt{s_x{}^2}$ و $s_y = \sqrt{s_y{}^2}$

حيث نسمي s_{xy} تغاير العينة(sample covariance) .

ومن خلال إجراء تعديل على تباين العينة باستبدال $(n-1)$ محل n يمكن لنا أن نضع صيغة سهلة للتعامل لحساب معامل الارتباط من خلال تعويض القيم أعلاه وإجراء بعض الاختصارات في العلاقة $(7-42)$ فنحصل على:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\ \ \bar{y}}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - n\bar{x}^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2 - n\bar{y}^2)^{1/2}}$$

وبتعويض قيم $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ و $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ نحصل على:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{\left\{ n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \right\}^{1/2}\left\{ n\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 \right\}^{1/2}} \quad \text{....(7-43)}$$

نلاحظ أن المعامل r تكون قيمه محصورة بين $1-$ و1 ، وهو بذلك يشابه إلى معامل الارتباط ρ .أي أن القيم ± 1 تحصل عندما تقع النقاط (x_i, y_i) على الخط المستقيم بشكل يجعلها تعبر عن هذا الخط بشكل كبير،وبمعنى آخر إنها تتقرب لتشكل هذا الخط وتكون العلاقة الخطية بين x و y .

مثال7-18

احسب معامل الارتباط لقيم المتغيرين العشوائيين X و Y الموضوعة في الجدول أدناه:

x	y	xy	x^2	y^2
9.8	7.6	74.48	96.04	57.76
10.4	8.6	89.44	108.16	73.96
10.2	7.9	80.58	104.04	62.41
8.4	7.6	63.84	70.56	57.76
11.7	8.6	100.62	136.89	73.96
9.7	8.4	81.48	94.09	70.56
9.6	7.6	72.96	92.16	57.76
9.3	7.4	68.82	86.49	54.76
10.6	8.7	92.22	112.36	75.69
9.7	7.1	68.87	94.09	50.41
10.6	8.7	92.22	112.36	75.69
9.8	7.8	76.44	96.04	60.85
12.6	9.0	113.40	158.76	81.00
132.4	105.0	1075.37	1362.04	852.56

وبتعويض المجاميع التي حصلنا عليها في كل عمود من الأعمدة أعلاه نحصل:

$$r = \frac{13(1075.37) - (132.4)(105.0)}{\left\{13(1362.04) - (132.4)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{13(852.56) - (105.0)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{77.81}{(176.76)^{\frac{1}{2}}(58.28)^{\frac{1}{2}}} = +0.77$$

نلاحظ بان قيمة معامل الارتباط للعينة $r = +0.77$ تكون موجبة وهي تبين أن الارتباط بين المتغيرات العشوائية X و Y يكون ارتباطاً قوياً،وبما أن قيم معامل الارتباط القصوى تكون محصورة بين $1-$ و1،وان r لا يصل إلى هذه القيمة الا اذا كانت جميع النقاط تقع على الخط المستقيم وتمثله بشكل تام.

9-7 التوقع الشرطي Conditional Expectation

إن دراسة المتغيرات العشوائية ذات البعدين تجعلنا نهتم بدراسة التوقعات الشرطية لهذه المتغيرات ،حيث تحسب من خلال توزيعاتها الشرطية، فمثلاً دراسة العلاقات بين الزيادة في سكان مجتمع معين والارتفاعات الحاصلة فيها ومن ثم فهي تمثل التوقع أو متوسط هذه الزيادات في السكان.

تعريف7-13

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين ، ولتكن $g_1(x/y)$ تمثل دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية(conditional p.d.f)بالنسبة للمتغير X عندما $Y = y$ معطى. فان قيمة **التوقع الشرطي**(conditional expected value) للمتغير X عندما $Y = y$ معطى هو:

$$E(X/Y=y) = \sum_{all\ x} x g_1(x/y) \qquad \text{(7-44)}$$

في حالة المتغير العشوائي من النوع المتقطع.

ويكون:

$$E(X/Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x g_1(x/y)dx \qquad \text{(7-45)}$$

في حالة المتغير العشوائي من النوع المستمر.

وبالأسلوب نفسه يمكن لنا أن نعرف التوقع الشرطي للمتغير Y عندما $X = x$ معطى وهو:

$$E(Y/X=x) = \sum_{all\ y} y g_2(y/x) \qquad \text{(7-46)}$$

في حالة المتغير العشوائي المتقطع، أما في حالة كون المتغير العشوائي من النوع المستمر فان التوقع الشرطي للمتغير Y عندما $X = x$ معطى هو:

$$E(Y/X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y g_2(y/x)dy \qquad \text{(7-47)}$$

ولتعميم الحالات أعلاه،سنعتبر الدالة $h(X)$ هي دالة للمتغير X ،وعليه نعرف التوقع الشرطي للدالة $h(X)$ اذا وجد بالصيغة الآتية:

$$E\{h(X)/y\} = \sum_{all\ x} h(x) g_1(x/y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7\text{-}48)$$

في حالة كون المتغير العشوائي من النوع المتقطع ،أما في حالة المتغير العشوائي المستمر فيعرف التوقع بالصيغة الآتية:

$$E\{h(X)/y\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) g_1(x/y) dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7\text{-}49)$$

وبالأسلوب نفسه نستطيع حساب التوقع الشرطي للدالة $h(Y)$ كدالة للمتغير العشوائي Y .

وعندما تكون $h(X) = X^r$ فان التوقع الشرطي الذي يقابل هذه الدالة هو كالآتي:

$$E(X^r / Y = y) = \sum_{all\ x} h(x) g_1(x/y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7\text{-}50)$$

ويسمى العزم الشرطي من الرتبة r للمتغير X حول نقطة الأصل عندما $Y = y$ معطى.

وبالأسلوب نفسه نحسب العزم الشرطي من الرتبة r للمتغير Y حول نقطة الأصل عندما $X = x$ معطى.

مثال 7-19

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين متقطعين لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة الآتية(مثال 7-17):

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}\{1+\theta(2e^{-x}-1)(2e^{-y}-1)\}, & x, y \ge 0, |\theta| < 1 \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

إحسب العزم الشرطي للمتغير X عندما $Y = y$ ؟

الحل

للحصول على دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير العشوائي X فان:

$$g_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{e^{-(x+y)}\left\{1+\theta(2e^{-x}-1)(2e^{-y}-1)\right\}}{e^{-y}}$$
$$=e^{-x}\left\{1+\theta(2e^{-x}-1)(2e^{-y}-1)\right\}$$

وبذلك يكون العزم الشرطي من الرتبة r هو:

$$E(X^r/Y=y)=\int_0^\infty x^r g_1(x/y)dx$$
$$=\left\{1-\theta(2e^{-y}-1)\right\}\int_0^\infty x^r e^{-x}dx+2\theta(2e^{y}-1)\int_0^\infty x^r e^{-2x}dx$$
$$=r!\left\{1-\theta-(2e^{-y}-1)(1-2^{-r})\right\}$$

وبشكل خاص عندما يكون $r=1$ فان:

$$E(X/Y=y)=1+\frac{1}{2}\theta-\theta e^{-y}$$

ولحساب التباين الشرطي إلى X عندما Y معطى فان:

$$var(X/Y=y)=E(X^2/Y=y)-\left\{E(X/Y=y)\right\}^2$$
$$=1+\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\theta^2-(\theta-\theta^2)e^{-y}-\theta^2e^{-2y}$$

ملاحظة:

إن $E(X/Y=y)$ يمثل التوقع إلى X عندما يكون الحدث Y معطى،وهو بشكل عام دالة بالنسبة إلى y.

وتمثيله بيانياً يسمى انحدار المنحني(regression curve) من X على Y، وفي حالة $E(Y/X=x)$ فيسمى انحدار المنحني Y على X.والرسم البياني(7-7) أدناه يظهر هذه الحالة:

ملاحظة:

- نلاحظ من النظرية(7-10)بأنه اذا كان الانحدار خطياً و$\rho = 0$ فان قيمتي $E(X / y)$ و $E(Y / x)$ مستقلتين وتعتمدان على y و x على التوالي.
- بما أن $E\{h(X) / y\}$ يعتمد على y،حيث أن Y متغير عشوائي للمشاهدات،فان $E\{h(X) / y\}$ يمكن اعتباره نفسه متغير عشوائي ومن ثم يكون التوقع له هو $E\left[E\{h(X) / y\}\right]$، ويسمى التوقع المتكرر(Iterated Expectation).

نظرية 7-11

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو بعدين و $h_1(X)$ و $h_2(Y)$ دوال للمتغيرين X و Y على التوالي. فان:

$$E\left[E\{h_1(X) / x\}\right] = E\{h_1(X)\} \qquad \text{(7-58)}$$

و

$$E\left[E\{h_2(Y) / y\}\right] = E\{h_2(Y)\}$$

البرهان

سوف نبرهن الجزء الأول معتبرين أن X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين.

من التعريف فان:

$$E\{h_1(X) / y\} = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x) g_1(x / y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x) \frac{f(x,y) dx}{f_2(y)}$$

وبأخذ التوقع بالنسبة إلى Y، فان:

$$E\left[\;E\{h_1(X) / y\}\;\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x) \frac{f(x,y) dx}{f_2(y)} \right\} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x) f(x,y) dx dy$$

ومن اتجاه آخر للتكامل فان:

$$E[\ E\{h_1(X)/y\}\ ] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x)\left\{\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\ \right\}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x) f_1(x)\,dx \quad \text{.....................(7-59)}$$

وبما أن $f_1(x)$ هي دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية بالنسبة إلى X ، فان :

$$E\left[E\{h_1(X)/y\}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x) f_1(x)\,dx = E\{h_1(X)\}$$

وبذلك يكون البرهان قد تحقق.

مثال 7-20

اذا كان X و N متغيرين عشوائيين ، وان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير N هي $f(n) = p$ حيث أن $(N = n)$ وان المتوسط لها هو μ_N والتباين $\sigma_N{}^2$ و X له التوزيع الثنائي الشرطي $g(x/n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ وان $E(X/n) = np$ وان $\text{var}(X/n) = np(1-p)$ ، احسب المتوسط والتباين بالنسبة إلى X ؟

الحل

$$E(X) = E\{E(X/n)\} = \sum_{all\ n} f(n)\,E(X/n)$$

$$= \sum_{all\ n} f(n)\,np = p\,\mu_N$$

$$E(X^2) = E\{E(X^2/n)\} = \sum_{all\ n} f(n)\,E(X^2/n)$$

$$= \sum_{all\ n} f(n)\left[var(X/n) + \{E(X/n)\}^2\right]$$

$$= \sum_{all\ n} f(n)\left\{np(1-p) + n^2p^2\right\}$$

$$= p(1-p)\,\mu_N + p^2(\sigma_n{}^2 + \mu_n{}^2)$$

$$var(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = p(1-p)\,\mu_N + p^2\sigma_N{}^2$$

تمارين الفصل السابع

1. إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة (j.p.d.f) للمتغيرين X و Y هي كما يأتي:

x \ y	-1	0	1	2
-1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0
1	0	0	0	$\frac{1}{6}$

اوجد: 1 - دالة العزم المولدة لكل من X و Y ؟

2- احسب $COV(X,Y)$ ؟

2. اثبت أن $\sigma^2 = npq$ في التوزيع الثنائي الحدين (Binomial dist.) ؟

3. إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي الثنائية ($Bivariate\ \ p.d.f$) للمتغيرين العشوائيين X و Y هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x(y-x) & ,0\le x\le 3 \quad 2\le y\le 4\\ \\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

احسب : 1- $E(X+Y)$ ؟ 2- $E(X-Y)$ ؟ 3- احسب التباين للتوزيع الهامشي (Marginal Dist.) لـ X و Y ؟ 4- احسب معامل الارتباط (Correlation cof.) بين X و Y ؟

4. إذا كان X وY متغيرين عشوائيين مستمرين $(c.r.v)$ لهما دالـة التوزيـع التجميعيـة الثنائية $(Bivariate\ \ c.d.f)$ الآتية :

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & y,x\le 0 \quad ,y\le 0 \\ \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)} & ,x,y>0 \end{cases}$$

اوجد 1- دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة لـx وy ؟

2- اوجد الدوال الهامشية (Marginal Fun.) لـ X و Y ؟

3- اثبت إن X وY متغيرين عشوائيين مستقلين ؟

5. اذا كان المتغيرين العشوائيين X وY لهما دالة التوزيع التجميعية المشتركة الآتية:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & ,x\le 0 \quad or \quad y\le 0 \\ xy\Big/\{(1+x)(1+y)\} & ,x,y>0 \end{cases}$$

أوجد دالـة التوزيـع الاحتماليـة المـشتركة للمـتغيرين X وY،ثـم أوجـد دوالهمـا التوزيعية الهامشية،وبين أن المتغيرين العشوائيين مستقلين؟

6. اذا كان المتغيرين العشوائيين X وY لهما الدالة التالية:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^3y+\dfrac{\lambda^3}{16}y^2 & ,0<x<1,0<y<2 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

تحقق من كون $f(x,y)$ هي دالـة توزيـع احتمـالي مـشتركة؟ ،ثـم اوجـد الـدوال التوزيعية الهامشية للمـتغيرين العـشوائيين ؟،ثـم اوجـد دالـة التوزيـع الاحتمـالي الشرطي إلى X عندما $Y=y$ معطى؟.

7. اذا كان X و Y متغيرين عشوائيين ،وان $U = \alpha_1 + \beta_1 X$ ،$V = \alpha_2 + \beta_2 Y$ ،حيث أن α_1 و α_2 و β_1 و β_2 ثوابت اختيارية،بين ان معامل الارتباط بين U و V يساوي معامل الارتباط بين X و Y ؟

8. اذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين لهما دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة التالية :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/(2x^2y), & 1 < x < \infty, 1/x < y < x \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

اشتق دالة التوزيع الهامشية للمتغيرين X و Y ؟،ثم اوجد دالة التوزيع الاحتمالية الشرطية إلى X عندما $Y = y$ معطى؟

الفصل الثامن

التوزيعات الاحتمالية الثنائية الخاصة

8-1 مقدمة

8-2 التوزيع الثنائي الحدين السالب بمتغيرين

8-3 الانحدار ومعامل الارتباط

8-4 التوزيع الطبيعي بمتغيرين

8-5 دوال التوزيع الهامشية

8-6 الدالة المولدة للعزم

8-7 دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية

تمارين الفصل الثامن

الفصل الثامن
بعض التوزيعات الاحتمالية الثنائية الخاصة
SPECIAL BIVARIATE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

8-1 مقدمة

لقد تناولنا في الفصلين الرابع والسادس بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالنسبة للمتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة على التوالي،وبعد دراستنا في الفصل السابع للمتغيرات العشوائية الثنائية ،لذلك فإننا سوف نتناول في هذا الفصل بعض التوزيعات الخاصة بمتغيرين عشوائيين ،و نتطرق إلى احد التوزيعات المتقطعة ومن ثم أحد التوزيعات المستمرة كي نعطي فكرة عن طبيعة هذه التوزيعات وخصائصها وأهميتها في دراسة ظواهر المجتمع الإحصائي.[2]

8-2 التوزيع الثنائي الحدين السالب بمتغيرين
A Bivariate Negative Binomial Distribution

لقد أشرنا في الفصل الرابع إلى التوزيع الثنائي الحدين السالب بمتغير عشوائي متقطع واحد،ولاحظنا طريقة اشتقاقه التي تعتمد على توزيع بوسون حيث لاحظنا بأنه يتحول إلى توزيع بوسون حسب نظرية (4-1).

سوف نوسع في هذا الفصل فكرة التوزيع الثنائي الحدين إلى توزيع بمتغيرين عشوائيين متقطعين يمثلان المعدلات الزمنية لوقت حصول حدث معين، وان هذه الأحداث في حالة كونها تمثل عدد أفراد مجتمع كبير فان كل حدث لأي فرد من هذا المجتمع سيحدث بشكل مستقل عما يحصل في الأحداث الأخرى ويتبع توزيع بواسون.

لذلك سنفرض أن لدينا متغيرين عشوائيين هما X و Y يمثلان عدد الأحداث التي تحصل لكل فرد من المجتمع بمعدل زمني مقداره λ .

وعليه فان دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغيرين X و Y هي:

$$f(x,y/\lambda) = p(X = x,Y = y/\lambda) = p(X = x/\lambda)p(Y = y/\lambda)$$

$$= \left\{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\right\}\left\{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}\right\}$$

$$= \frac{e^{-2\lambda}\lambda^{x+y}}{x!\,y!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8\text{-}1)$$

ثم نفرض بان المعدل λ يتغير بالنسبة للمجتمع وبذلك يمكن أن نتعامل معه كمتغير عشوائي يتبع دالة كاما وكما يأتي:

$$g(\lambda) = \alpha^{\beta}\lambda^{\beta-1}e^{\frac{-\alpha\lambda}{\Gamma(\beta)}} \quad ,0 < \lambda < \infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8\text{-}2)$$

حيث أن $\alpha > 0$ و $\beta > 0$.

وعليه فان دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للتوزيع الثنائي بمتغيرين عشوائيين هما X و Y تعطى بالشكل الآتي:

$$f(x,y) = p(X = x,Y = y) = \int_{0}^{\infty} g(\lambda)p(X = x,Y = y/\lambda)d\lambda$$

$$= \frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)x!\,y!}\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda(2+\alpha)}\lambda^{\beta+x+y-1}d\lambda$$

وبفرض أن $u = \lambda(2+\alpha)$ فان $du = (2+\alpha)d\lambda$ وعليه فان

$d\lambda = \frac{du}{2+\alpha}$ وبالتعويض عن هذه القيم في العلاقة أعلاه نحصل على:

$$= \frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)x!\,y!}\int_{0}^{\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{2+\alpha}\right)^{\beta+x+y-1}\frac{du}{(2+\alpha)}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+x+y)}{\Gamma(\beta)x!\,y!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{\beta}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)^{x+y} \quad ,x \geq 0, y \geq 0 \ldots\ldots\ldots (8\text{-}3)$$

إن العلاقة اعلاة تمثل التوزيع الثنائي الحدين السالب لمتغيرين عشوائيين.

8-2-1 الدوال التوزيعية الهامشية للتوزيع الثنائي الحدين السالب بمتغيرين

إن دوال التوزيع الهامشية للمتغيرين X و Y هما في حالة التوزيع الثنائي السالب هما كما يأتي:

$$f_1(x) = \int_0^\infty p(X = x / \lambda) g(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \right\} \left\{ \frac{\alpha^\beta \lambda^{\beta-1} e^{-\alpha\lambda}}{\Gamma(\beta)} \right\} d\lambda$$

$$= \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta) x!} \int_0^\infty e^{-\lambda(1+\alpha)} \lambda^{x+\beta-1} d\lambda$$

$$= \frac{\Gamma(x+\beta)}{\Gamma(\beta) x!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^\beta \left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^x \quad , x \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8\text{-}4)$$

ونلاحظ بان هذه الدالة تمثل دالة توزيع ثنائي الحدين السالب بمتغير واحد هو x وبمعلمة هي β.

وبالأسلوب نفسه نحصل على دالة التوزيع الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي المتقطع Y وتكتب كما يأتي:

$$f_2(y) = \frac{\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(\beta) y!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^\beta \left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^y \quad , y \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8\text{-}5)$$

وهي بالحقيقة تمثل دالة توزيع ثنائي الحدين السالب بمتغير واحد هو y وبمعلمة هي β.

8-2-2 الدوال التوزيعية الشرطية:

يمكن لنا أن نحصل على دوال التوزيع الشرطية وذلك من خلال العلاقتين $(8-3)$ و $(8-5)$ حيث تكون للمتغير العشوائي X عندما $Y = y$ معطى وكما يأتي:

$$g(x / y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\Gamma(\beta + x + y)}{x!\, \Gamma(y+\beta)} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2} \right)^{\beta+y} \left(\frac{1}{\alpha+2} \right)^x , x \geq 0 \quad \ldots . (8\text{-}6)$$

وهذا هو توزيع ثنائي الحدين السالب للمتغيرين x و y وبمعلمه هي $(\beta + y)$.

وبالأسلوب نفسه نحصل على دالة التوزيع الاحتمالية الشرطية للمتغير العشوائي Y عندما يكون $X = x$ معطى وكما ياتي:

$$g(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{\Gamma(\beta+x+y)}{y!\,\Gamma(x+\beta)}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^{\beta+x}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)^{y}, y \geq 0 \ldots (8\text{-}7)$$

3-8 الانحدار ومعامل الارتباط

لإيجاد انحدار X على Y فان:[6]

$$E(X/y) = \sum_{0}^{\infty} x g(x/y)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} x\,\frac{\Gamma(\beta+x+y)}{x!\,\Gamma(y+\beta)}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^{\beta+y}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)^{x}$$

$$= \frac{(y+\beta)}{(\alpha+1)}\left(\sum_{0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+x+y+1)}{x!\,\Gamma(y+\beta+1)}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^{\beta+y+1}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)^{x}\right)$$

وبما أن مجموع جميع الحدود للعلاقة بين الأقواس هو واحد كونها دالة توزيع احتمالية ثنائي الحدين السالب بمعلمة $(\beta + y + 1)$ أي أن :

$$\left(\sum_{0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+x+y+1)}{x!\,\Gamma(y+\beta+1)}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^{\beta+y+1}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)^{x}\right) = 1$$

فإننا نحصل على:

$$E(X/y) = \frac{y+\beta}{\alpha+1} = \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{y}{\alpha+1} \ldots\ldots\ldots\ldots (8\text{-}8)$$

وهذه هي علاقة خطية تمثل انحدار X على Y .

وبالأسلوب نفسه نحصل على العلاقة الخطية لانحدار Y على X وهي:

$$E(Y/x) = \frac{x+\beta}{\alpha+1} = \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{x}{\alpha+1} \ldots\ldots\ldots\ldots (8\text{-}9)$$

ولإيجاد معامل ارتباط X مع Y فإننا نستخدم العلاقة في الفصل السابع $(7-51)$ والتي تبين بان معامل y هو $\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$. وكذلك فان الدوال الهامشية بالنسبة إلى X و Y هما نفس الدوال، وان $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=1$، وكذلك معامل y في العلاقة $(8-8)$ هو $\frac{1}{\alpha+1}$ فإننا نحصل على :

$$\rho=\frac{1}{\alpha+1} \quad \text{.......(8-10)}$$

وهو يمثل معامل الارتباط بين X و Y.

وبما أن $\alpha>0$ فان معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y تقع قيمته بين الصفر والواحد.

4-8 التوزيع الطبيعي بمتغيرين

The Bivariate Normal Distribution

إن التوزيع الطبيعي بمتغيرين عشوائيين مستمرين يعتبر من أكثر التوزيعات استخداماً وأهمية وذلك، لأن التوزيع يساعد على دراسة عينات المجتمع التي تتطلب متغيرين عشوائيين من حيث متوسطات العينة والتباينات وغيرها.

1-4-8 دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للتوزيع الطبيعي بمتغيرين

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين يتوزعان توزيعاً طبيعياً من النوع الثنائي فان دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة لهما هي:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right\}\right] \quad \text{.......(8-11)}$$

وهذه بالنسبة إلى $-\infty<x<\infty$ و $y<\infty$.

حيـــث أن $\mu_x = E(X)$ ، $\mu_y = E(Y)$ ، $\sigma_x^2 = var(X)$ ، $\sigma_y^2 = var(Y)$

وإن ρ يمثل معامل الارتباط بين X و Y.

ونلاحظ بان هذا التوزيع يعتمـد علـى خمسة معـالم هـي المتوسـطين والتبـاينين ومعامل الارتباط بين المتغيرين العشوائيين X و Y.

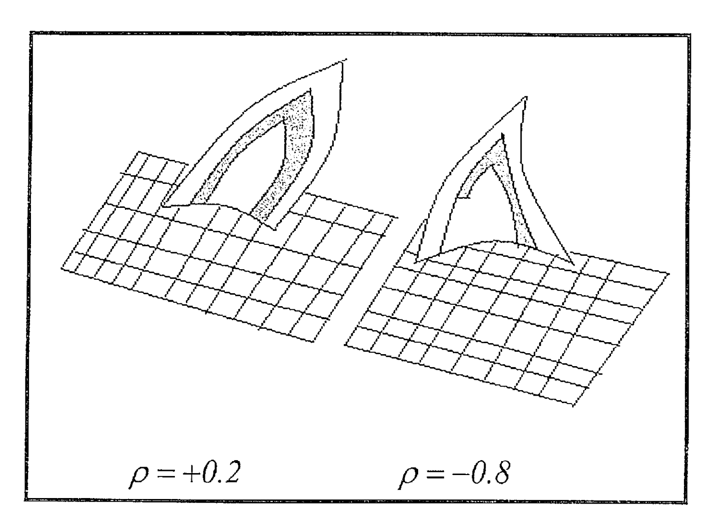
2-4-8 التوزيع الطبيعي القياسي بمتغيرين

إن التوزيـع الطبيعـي بمـتغيرين في العلاقـة $(8-11)$ يعطينـا التوزيـع الطبيعـي القياسي بمـتغيرين (Standardized Bivariate Normal Distribution) وذلـك بوضـع $\mu_x = \mu_y = 0$ و $\sigma_x = \sigma_y = 1$ ويعطى بالصيغة الآتية:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2) \right] \quad \ldots(8\text{-}12)$$

بالنسبة إلى $-\infty < x < \infty$ و $y < \infty$.

ونلاحــظ في الــشكل(8-1) أدنــاه توزيعــاً طبيعيــاً بمــتغيرين عنــدما $\rho = +0.2$ و $\rho = -0.8$ ،حيث أن المتغير العشوائي Y يتناقص عندما X يتزايد في حالة كون معامل الارتباط يأخذ قيمة سالبه وبالعكس عندما يأخذ معامـل الارتبـاط قيمـة موجبة.



الشكل (8-1) يوضح التوزيع الطبيعي بمتغيرين حسب قيمة ρ

إن دالـة الاحتمـال المشتركة للتوزيـع الطبيعـي بمتغيرين تحقـق شـروط دالـة الاحتمال من حيث كون $f(x,y)>0$ وهذا واضح مـن العلاقـة $(8-11)$ وكـذلك يمكن أن نثبت بان :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

من خلال عمـل التحويـل $u=\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$ و $v=\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$ واستخدام جاكوبي التحويل :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y$$

فيكون التكامل:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)\right]dudv$$

وبإكمال المربع في u أي أن :

$$u^2-2\rho uv+v^2=(u-\rho v)^2+v^2(1-\rho^2)$$

فإن:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u-\rho v)^2\right]dudv$$

وإذا جعلنا التحويل:

$t_1=\frac{(u-\rho v)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}$ و $t_2=v$ نحصل على:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{t_1^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}dt_1\right\}\frac{e^{-\frac{t_2^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}dt_2 = 1$$

وهذا هو التكامل بالنسبة إلى التوزيع $N(0,1)$ على الفترة $-\infty,\infty$.

5-8 دوال التوزيع الهامشية

من خلال إجراء التحويل $v=\dfrac{y-\mu_y}{\sigma_y}$، نحصل على دالة الاحتمال التوزيعية الهامشية للمتغير العشوائي X وكما يأتي:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_x(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 -2\rho v\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)+v^2\right\}\right]dv \quad \text{.............................(8-13)}$$

وبعد إجراء عدة خطوات وتحويلات فإننا نحصل على الدالة الهامشية:

$$f_1(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma_x}exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right\} \quad \text{........................(8-14)}$$

وبالأسلوب نفسه نحصل على دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية بالنسبة الى Y وكما يأتي:

$$f_2(y)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma_y}exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right\} \quad \text{.....................(8-15)}$$

ونلاحظ من خلال العلاقتين اعلاة بأنهما يمثلان $N(\mu_x,\sigma_x^2)$ و $N(\mu_y,\sigma_y^2)$ على التوالي.

6-8 الدالة المولدة للعزم

إن الدالة المولدة للعزم بالنسبة للتوزيع الطبيعي بمتغيرين عشوائيين هي:

$$M_{x,y}(t_1,t_2)=exp\left\{t_1\mu_x+t_2\mu_y+\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_x^2+2\rho t_1t_2\sigma_x\sigma_y+t_2^2\sigma_y^2\right\} \quad \text{..(8-16)}$$

وكما لاحظنا في الفصول السابقة لطرق إيجاد الدوال المولدة للعزوم فإننا نستخدم الأسلوب نفسه في إيجاد هذه العلاقة من خلال:[4]

$$M_{x,y}(t_1,t_2)=E(e^{t_1x+t_2y})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t_1x+t_2y}f(x,y)\,dxdy$$

والأمر يتطلب بعض التحويلات مشابه لما أجريناه سابقاً.

وعليه فان العزوم حول نقطة الأصل من اشتقاق العلاقة(16-8) حيث نحصل على:

$$E(X)=\left\{\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right\}_{t_1=t_2=0}=\mu_x$$

$$E(X^2)=\left\{\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{\,2}}\right\}_{t_1=t_2=0}=\mu_x^{\,2}+\sigma_x^{\,2}$$

$$E(XY)=\left\{\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\right\}_{t_1=t_2=0}=\mu_x\mu_y+\rho\sigma_x\sigma_y$$

وبالأسلوب نفسه نحصل على:

$$E(Y)=\left\{\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right\}_{t_1=t_2=0}=\mu_y$$

$$E(Y^2)=\left\{\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_2^{\,2}}\right\}_{t_1=t_2=0}=\mu_y^{\,2}+\sigma_y^{\,2}$$

وبذلك نستطيع أن نحسب التباين وكما يأتي:

$$var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\sigma_x^{\,2}$$

$$var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\sigma_y^{\,2}$$

وكذلك نحسب معامل الارتباط بين X و Y وكما يأتي:

$$\rho_{X,Y}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

8-7 دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية

اذا كان لدينا المتغيران العشوائيان X و Y لهما دالة التوزيع الطبيعي بمتغيرين فإننا نستطيع أن نُعبر عن دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية وكما يأتي:

$$g(x/y)=\frac{1}{\sigma_x(2\pi(1-\rho^2))^{\frac{1}{2}}}exp(\frac{(x-\mu_x-\rho(\frac{\sigma_x}{\sigma_y})(y-\mu_y))^2}{2\sigma_x{}^2(1-\rho^2)}) \quad ..(8\text{-}17)$$

بالنسبة للمتغير X عندما $Y=y$ معطى.

وبالأسلوب نفسه فان دالة الاحتمال الشرطية للمتغير Y عندما $X=x$ معطى تكون كما يأتي:

$$g(y/x)=\frac{1}{\sigma_x(2\pi(1-\rho^2))^{\frac{1}{2}}}exp(\frac{(y-\mu_y-\rho(\frac{\sigma_y}{\sigma_x})(x-\mu_x))^2}{2\sigma_y{}^2(1-\rho^2)}) \quad ..(8\text{-}18)$$

إن العلاقتين اعلاه توضح لنا بان دالتي الاحتمال الشرطي تمثل توزيعاً طبيعياً بمتغيرين وان المتوسط والتباين لهما هو:

$$\sigma_x^2(1-\rho^2) \text{ ، } \mu_x+\rho(\frac{\sigma_x}{\sigma_y})(y-\mu_y)$$

على التوالي، وكذلك يكون:

$$.\ \sigma_y^2(1-\rho^2) \text{ ، } \mu_y+\rho(\frac{\sigma_y}{\sigma_x})(x-\mu_x)$$

وهذه النتائج تؤدي إلى الانحدار الخطي للعلاقتين وكما يأتي:

$$E(X/y)=\mu_x+\rho(\frac{\sigma_x}{\sigma_y})(y-\mu_y)$$

$$E(Y/x)=\mu_y+\rho(\frac{\sigma_y}{\sigma_x})(x-\mu_x)$$

حيث أن كلا العلاقتين هما علاقتان خطيتان.

ملاحظة:

إن علاقتي التباين التي حصلنا عليها أعلاه تودي إلى إنهما يقتربان من الصفر عندما يكون معامل الارتباط بين ± 1 .

مثال 8-1

كانت نتائج مادتي الفيزياء والرياضيات في إحدى الجامعات تتمثلان بالمتغيرين العشوائيين X و Y على التوالي ،وأنهما يتبعان التوزيع الطبيعي بمتغيرين بمعالم هي $\mu_X = 60$ ، $\mu_y = 55$ ، $\sigma_x = 8$ ، $\sigma_y = 6$ و $\rho = 0.7$ اوجد دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية بالنسبة إلى Y عندما $X = 50$ ؟

الحل

$$E(Y / x) = \mu_y + \rho(\frac{\sigma_y}{\sigma_x})(x - \mu_x)$$

$$= 55 + (0.7)\frac{8}{6}(50 - 55) = 50.33$$

$$var(Y / X = 50) = \sigma_y^2(1 - \rho^2) = 6^2(1 - 0.49) = 18.36$$

$$P(50 < Y < 60 / X = 50) = \Phi\left(\frac{60 - 50.33}{\sqrt{18.36}}\right) - \Phi\left(\frac{50 - 50.33}{\sqrt{18.36}}\right) = 0.518$$

وهذه القيمة حُسبت من جداول التوزيع الطبيعي في ملاحق الكتاب.

تمارين الفصل الثامن

1. اذا كان كل من X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين لهما دالة التوزيع التجميعية التالية:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, x\le 0, or \quad y\le 0 \\ xy/((1+x)(1+y)), x, y>0 \end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة ثم اوجد دالتي التوزيع الهامشيتين وبين أن المتغيرين العشوائيين مستقلان؟

2. إذا كان كل من X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين لهما دالة التوزيع الاحتمالية الآتية:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^3y+\frac{\lambda^3}{16}y^2 \quad ,0<x<1, 0<y<2 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

تحقق من كون الدالة هي دالة احتمالية؟ ثم اوجد دالتي التوزيع الهامشيتين ودوال التوزيع الشرطية لهما؟

3. اذا كان كل من X و Y متغيرين عشوائيين لهما دالة توزيع تجميعية بمتوسط μ وتباين σ^2، إذا كان $Y=\alpha+\beta X$، حيث α و β ثوابت.

اختار α و β بحيث يكون للمتغير Y متوسط يساوي صفر وتباين يساوي واحد؟ ثم اوجد معامل الارتباط بين المتغيرين؟

الفصل التاسع

بعض توزيعات الإحصاء الاستدلالي



الفصل التاسع

توزيعات الإحصاء الاستدلالي

INFERENTIAL STATISTICS DISTRIBUTIONS

9-1 مقدمة

سنتناول في هذا الفصل توزعين يعتبران من أهم التوزيعات في دراسة المسائل المتعلقة بالاستدلال أو الاستنتاج الإحصائي والتي لها تطبيقات واسعة جداً في مجال دراسة المجتمع الإحصائي حيث أن الإحصاء الاستدلالي يتعامل مع التعميم والتنبؤ والتقدير ولذلك فهو يهتم بتطبيق الأساليب الإحصائية في المجالات المختلفة مثل الاقتصاد والطب والزراعة والعلوم،أي اتخاذ أفضل القرارات الممكنة عندما تكون المعلومات المتوفرة غير وافية.[8]

9-2 توزيع ستيودنت Student T Distribution

ليكن المتغيران العشوائيان المستقلان Y و Z ،حيث أن Y يتوزع توزيعاً طبيعياً قياسياً($Y \sim N(0,1)$) و Z يتوزع توزيع كاي سكوير($Z \sim \chi_{\nu}^{2}$) بدرجة حرية ν وعليه فان المتغير العشوائي T المعرف بالعلاقة التالية :[2]

$T = \dfrac{Y}{\sqrt{Z/\nu}}$ له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^{2}}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \qquad , -\infty < t < \infty$$

وان $\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \qquad , \alpha > 0$

وعليه نقول بان T تتوزع توزيع ستيودنت (او توزيع t) بدرجة حرية v وبعبارة أخرى أن: $T \sim t_v$

3-9 خصائص توزيع ستيودنت

أن من أهم خصائص هذا التوزيع هي:

- يمكن حساب متوسط التوزيع من خلال العلاقة التالية:

$$E(T^r) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v^{r/2} y^r z^{-r/2} f(y,z)\,dydz$$

وبما أن المتغيران العشوائيان Y و Z مستقلان فان:

$$E(T^r) = v^{r/2} E(Y^r) E(Z^{-r/2})$$

وحيث أن $Y \sim N(0,1)$ و $E(Y^r) = 0$ لأنه يمثل متوسط توزيع طبيعي قياسي عندما r عدداً فردياً وعليه نحصل على ان: $E(T) = 0$

أن توزيع t يكون متماثلاً حول المتوسط لجميع قيم r الفردية،أما إذ كانت r عدداً زوجياً فان:

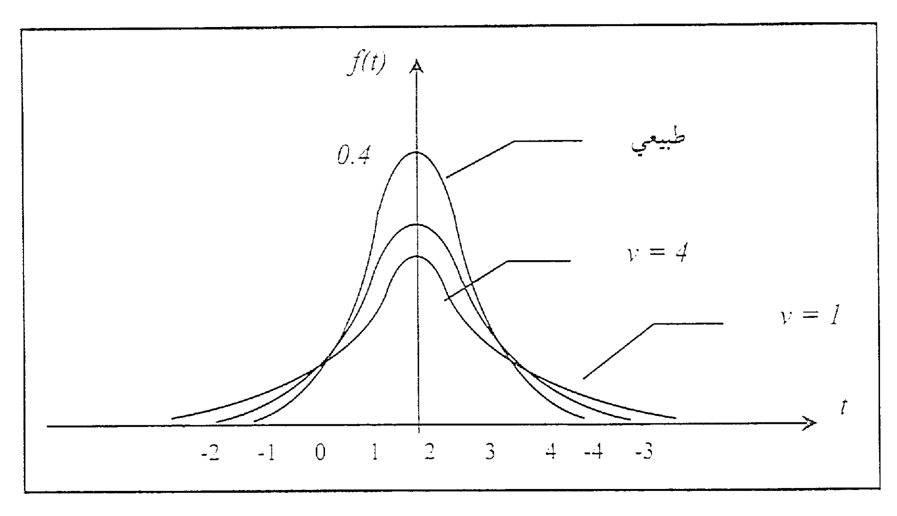
$$E(T^r) = \frac{v^{r/2} r!}{(r/2)!\, 2^{r/2} (v-2)(v-4)\ldots(v-r)}$$ علماً ان $r < v$

- يمكن حساب تباين التوزيع بالأسلوب نفسه حيث أن:

$var(T) = E(T^2)$ ومنها نحصل على:

$var(T) = v/(v-2)$ لجميع $v > 2$.

ويمكن تمثيل ذلك بالرسم الآتي:



الشكل(9-1) منحني توزيع t

ويتبين لنا من خلال ذلك ما يأتي:

1. ان منحني t متماثل حول المتوسط 0 أي انه لكل نقطة موجبة من نقاط t هنالك نقطة سالبه مناظرة لها،وتتساوى المساحات تحت المنحني من اليمين واليسار.
2. ان المنحني $f(t)$ يقترب من المنحني الطبيعي القياسي كلما زادت قيمة v.[9]

4-9 توزيع فيشر Fisher Distribution

ليكن المتغيران العشوائيان المستقلان X_1 وX_2 يتوزعان توزيع كاي سكوير بدرجتي حرية v_1 وv_2 على التوالي($X_1 \sim \chi^2_{v_1}$ و$X_2 \sim \chi^2_{v_2}$) فان المتغير X المعرف بالصيغة الاتية: $X = \frac{X_1/v_1}{X_2/v_2}$ له دالة الكثافة الاحتمالية الاتية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} v_1^{\frac{v_1}{2}} v_2^{\frac{v_2}{2}} x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1} (v_2 + v_1 x)^{-\frac{v_1+v_2}{2}} & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$$

وعلية نقول بان المتغير X يتوزع توزيع فيشر(او توزيع F)بدرجة حرية ν_1 و ν_2 ويُعبر عنه بالشكل الآتي: $X \sim F_{\nu_1,\nu_2}$.

9-5 خصائص توزيع فيشر

ان من اهم خواص توزيع فيشر هو حساب المتوسط والتباين للتوزيع وذلك من خلال ايجاد العزم للتوزيع ،حيث ان المتغيران X_1 و X_2 مستقلان وعليه يمكن وضع:[2]

$$E(F^r) = (\nu_2/\nu_1)E(X_1^{\,r})E(X_2^{\,r})$$

$$= \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^r \left(\frac{2^r \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu_1 + r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu_1\right)}\right)\left(\frac{2^{-r} \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu_2 - r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu_2\right)}\right)$$

وبعد اجراء التبسيط نحصل على:

$$E(F^r) = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^r \frac{(\nu_1 + 2r - 2)(\nu_1 + 2r - 4)\ldots\nu_1}{(\nu_2 - 2)(\nu_2 - 4)\ldots(\nu_2 - 2r)} \quad ,\nu_2 > 2r$$

وبوضع $r = 1$ نحصل على متوسط توزيع F :

$$\mu = E(F) = \nu_2/(\nu_2 - 2) \quad ,\nu_2 > 2$$

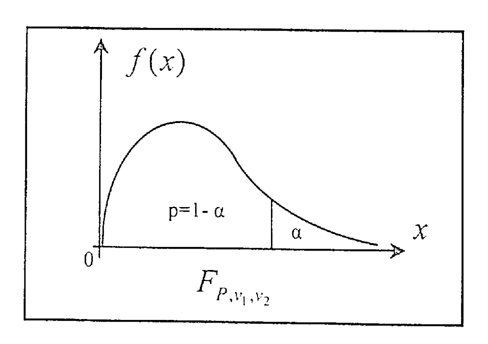
ثم نحسب: $E(F^2) = \dfrac{\nu_2^{\,2}(\nu_1 + 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)(\nu_2 - 4)} \quad ,\nu_2 > 4$

وعلية نحصل على تباين التوزيع:

$$\sigma^2 = var(F) = \frac{2\nu_2^{\,2}(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)} \quad ,\nu_2 > 4$$

ويظهر من المعادلة تبعية منحنى $f(x)$ بالإضافة لـ x إلى كل من ν_1 وν_2 ولذلك تحدد أي نقطة F من خلال ثلاثة معالم: ν_1 وν_2, p (المساحة تحت المنحنى على يسار النقطة F) ، ونكتب F_{p,ν_1,ν_2} .

وفي الغالب تعطي الجداول الإحصائية قيم F عند $p = 0.95$ و$p = 0.99$.
والشكل أدناه يوضح ذلك:



الشكل(9-2)يوضح منحني توزيع فيشر

ويمكن وضع الملاحظات التالية الخاصة بحساب قيمة F :

$$F_{1-P,v_1,v_2} = \frac{1}{F_{P,v_2,v_1}}$$

$$F_{1-p,1,v} = t^2_{1-(p/2),v}$$

$$F_{p,v,\infty} = \frac{\chi^2_{p,v}}{v}$$

6-9 تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

أن فكرة تقارب التوزيعات تستند على أساس إمكانية استخدام توزيعين او أكثر في حساب قيمة احتمالية معينة.[9]

ليكن Z متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي فان: $Z = (x-\mu)/\sigma$ وكان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الثنائي، فان السلوك التقاربي لـ Z هو ما تثبته النظرية التالية:

$$Y = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} N(0,1) \text{ ،} \quad X \sim B(n,p) \text{ فان: } Y \approx N(0,1)$$

وعلية نقول بان المتغير X يتوزع توزيع فيشر(او توزيع F)بدرجة حرية v_1 و v_2 ويُعبر عنه بالشكل الآتي: $X \sim F_{v_1, v_2}$.

5-9 خصائص توزيع فيشر

ان من اهم خواص توزيع فيشر هو حساب المتوسط والتباين للتوزيع وذلك من خلال ايجاد العزم للتوزيع ،حيث ان المتغيران X_1 و X_2 مستقلان وعليه يمكن وضع:[2]

$$E(F^r) = (v_2/v_1)E(X_1^r)E(X_2^{-r})$$
$$= \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^r \left(\frac{2^r \Gamma\left(\frac{1}{2}v_1 + r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v_1\right)}\right)\left(\frac{2^{-r} \Gamma\left(\frac{1}{2}v_2 - r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v_2\right)}\right)$$

وبعد اجراء التبسيط نحصل على:

$$E(F^r) = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^r \frac{(v_1 + 2r - 2)(v_1 + 2r - 4)\dots v_1}{(v_2 - 2)(v_2 - 4)\dots(v_2 - 2r)} \quad , v_2 > 2r$$

وبوضع $r = 1$ نحصل على متوسط توزيع F :

$$\mu = E(F) = v_2 / (v_2 - 2) \quad , v_2 > 2$$

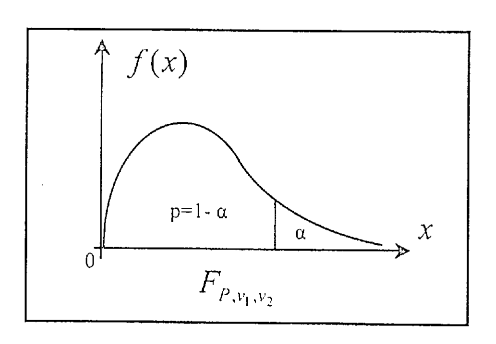
ثم نحسب: $E(F^2) = \dfrac{v_2^2 (v_1 + 2)}{v_1 (v_2 - 2)(v_2 - 4)} \quad , v_2 > 4$

وعلية نحصل على تباين التوزيع:

$$\sigma^2 = var(F) = \frac{2 v_2^2 (v_1 + v_2 - 2)}{v_1 (v_2 - 2)^2 (v_2 - 4)} \quad , v_2 > 4$$

ويظهر من المعادلة تبعية منحنى $f(x)$ بالإضافة لـ x إلى كل من v_1 وv_2 ولـذلك تحدد أي نقطة F من خلال ثلاثة معالم: v_1 وv_2 وp (المساحة تحت المنحنى على يسار النقطة F) ، ونكتب F_{p, v_1, v_2} .

وفي الغالب تعطي الجداول الإحصائية قيم F عند $p = 0.95$ و$p = 0.99$.
والشكل أدناه يوضح ذلك:



الشكل(9-2)يوضح منحني توزيع فيشر

ويمكن وضع الملاحظات التالية الخاصة بحساب قيمة F :

$$F_{1-P,v_1,v_2} = \frac{1}{F_{P,v_2,v_1}}$$

$$F_{1-p,1,v} = t^2_{1-(p/2),v}$$

$$F_{p,v,\infty} = \frac{\chi^2_{p,v}}{v}$$

6-9 تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

أن فكرة تقارب التوزيعات تستند على أساس إمكانيـة اسـتخدام تـوزيعين او أكثر في حساب قيمة احتمالية معينة.[9]

ليكن Z متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي القياسـي فـان: $Z = (x-\mu)/\sigma$ وكان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الثنائي، فان السلوك التقاربي لـ Z هو ما تثبتـه النظرية التالية:

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} N(0,1) \text{ ،} \quad X \sim B(n,p) \text{ فان: } Y \approx N(0,1)$$

وعلية يمكن استنتاج ان في حالة n كبيرة وp غير قريب من 0 يمكن اعتبار التوزيع الثنائي كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي. ويعطي التوزيعان نتائج أكثر تقاربا كلما كانت n كبيرة أكثر. ونكتب:

$$lim_{n\to\infty}\left(a \leq \frac{x-np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}}\int_a^b e^{\frac{-u^2}{2}}du$$

ومما يسرع تقارب التوزيع الثنائي من التوزيع الطبيعي كون p قريب من 0.5 وتكمن فائدة التقارب بين التوزيعات في قدرتنا على حساب قيمة الاحتمال من متغير مستمر بينما يكون متغير التوزيع متقطع.

كذلك يعطي توزيع بواسون نتائج قريبة من التوزيع الثنائي عندما $n \geq 30$ و $np < 5$ أو $nq < 5$.

مثال 9-1

10 % من إنتاج آلة مايُعد تالفا، نأخذ 30 وحدة من إنتاج هذه الآلة عشوائيا. أحسب احتمال أن يكون هناك وحدتان تالفتان؟.

الحل

$$P(X=2) = \binom{30}{2}(0.1)^2(0.9)^{28} = 0.22$$

$P(X=2) = C^2_{30}\,(0,1^2)\,(0.9^{28}) = 0.22$

لاستعمال توزيع بواسون نحسب أولا قيمة المعلمة (معلمة قانون بواسون) كالآتي:

$\lambda = \mu = np = (30)(0.1) = 3$ وعليه فان:

$$P(X=2) = \lambda^x e^{-\frac{\lambda}{x!}} = (3^2 e^{-\frac{3}{2!}}) = 0.22$$

7-9 نظرية النهاية المركزية Central Limit Theorem

لتكن المتغيرات $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع الاحتمالي بتباين ومتوسط محددين. إذا كانت:[9]

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n \qquad ,(n = 1, 2, ...)$$

$$S_n = X_1 + X_2 + . . . + X_n \qquad (n = 1, 2, . . .),$$

فـإن S_n تتبـع التوزيـع الطبيعـي عنـدما $n \rightarrow \infty$. وبمـا أن $E(S_n) = n\mu$ و $\sigma_{S_n} = \sigma\sqrt{n}$ فان :

$$lim_{n\to\infty}\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b \right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_a^b e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

في الحقيقة فإن النظرية محققـة عنـدما تكـون المـتغيرات المستقلة X_i لهـا نفـس المتوسط والتباين حتى ولو لم يكن لها بالـضرورة نفـس التوزيـع.ونظـراً لأهميـة هـذا التوزيع فقد وُضعت له جداول خاصة من اجـل $\alpha = 0.01$ و $\alpha = 0.05$ ولقـيم مختلفـة من ν_1 , ν_2 .

تمارين الفصل التاسع

1. إذا كانت إحدى الشركات تنتج 0.20 من المصابيح التالفة،وبعد اخذ عينه حجمها 24 مصباح منها وفحصها،فما احتمال ان تكون اربع وحدات من إنتاج الشركة تالفاً؟

2. إذا كانت درجتي الحرية للمتغيرين العشوائيين في توزيع F هما 2و3 على التوالي ،احسب متوسط وتباين التوزيع؟

3. استخدم دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فيشر في اشتقاق تباين التوزيع؟

4. إذا كان X و Y يتوزعان توزيعاً طبيعياً معيارياً وتوزيع كاي سكوير على التوالي،احسب القيمة المتوقعة للمتغير $T = \frac{X}{\sqrt{Y / v}}$ عندما يكون r عدداً فردياً.

5. إذا كان X_1, X_2 متغيرين عشوائيين لكل منهما توزيع كاي سكوير بدرجتي حرية v_1, v_2 على التولي،اثبت أن $Y = \frac{X_1/v_1}{X_2/v_2}$ له توزيع فيشر بدرجة حرية v_1, v_2. [10]

الفصل العاشر

توزيعات المعاينة



الفصل العاشر

توزيعات المعاينة

SAMPLING DISTRIBUTIONS

10-1 مقدمة

تُعتبر عمليات الاستقصاء التي تجري في المجتمعات المعاصرة ،من الأمور التي لها أهمية كبيرة ،وذلك لأنها تُعطي فكرة جيدة عن توجهات المجتمع الذي تجري دراسته.

ففي عالم الأعمال تقوم المؤسسات عن طريق مصالح التسويق ومصالح البحوث والتطوير بإجراء استقصاءات للإطلاع على توجهات المستهلكين، وفي وسائل الإعلام لا يمر يوم دون أن يُعلن عن نتائج استقصاء أجرته مجلة أو جامعة حول مواضيع سياسية أو اجتماعية متعددة، منها الاستقصاءات المثيرة للجدل حول الأراء السياسية للمواطنين أثناء الحملات الانتخابية. فما هي الأسس النظرية الرياضية التي تستند عليها الاستقصاءات المختلفة ؟ أو كيف يمكن الاستدلال من خلال بيانات عينة ما على خصائص المجتمع الذي أخذت منه؟ أن الإجابة على هذه الأسئلة و غيرها تتطلب فهم العلاقات الرياضية بين الخصائص المختلفة للمجتمع مثل المتوسط، التباين وغيرها، والخصائص المناظرة لها في العينة وهو ما سنتناوله في هذا الفصل وسيتضمن الفصل دراسة ما يأتي:[9]

مفاهيم إحصائية ،توزيعات المعاينة للمتوسطات،توزيع المعاينة للنسبة،توزيع المعاينة للفروق و المجاميع،توزيع المعاينة للتباين و توزيع المعاينة لنسبة تباينين.

10-2 المجتمع والعينة Population And Sample

المجتمع الإحصائي هو جميع المفردات التي تتمتع بصفة ما أو خاصية ما مشتركة،وهذه المفردات قد تكون بشراً أو أشياء أو ظواهر.[8]

ونلاحظ أن مصطلح المجتمع يقصد به القياسات أو القيم أو الأشياء التي تم قياسها (مجتمع الأوزان، مجتمع آراء الناخبين..)، كما أن المجتمع قد يكون محدودا أو غير محدود (نتائج رميات قطعة النقد).

أما العينة فهي ذلك الجزء من المجتمع التي يتم أختيارها عشوائياً أو بصورة غير عشوائية لتمثيل ذلك المجتمع وهي عادةً تكون محدودة.ونرمز للمجتمع بالرمز N والعينة بالرمز n .

وهناك عدة أمثلة توضح هذين المصطلحين:

- ترغب هيأة معينة بالبحوث السياسية في تقدير نسبة الناخبين المساندين لمرشح معين في *10* ولايات، فتقوم باستجواب *100* ناخب من كل ولاية. الناخبون في الولايات العشر يمثلون المجتمع بينما الـ *1000* ناخب المستجوبون يمثلون العينة.
- لتقدير نسبة الكرات داخل صندوق، التي من لون معين، نقوم عدد من المرات بسحب كرة ثم نسجل لونها ثم نعيدها. عدد الكرات المسحوبة يمثل حجم العينة.
- قد ترغب الإدارة العسكرية في تقدير الوزن المتوسط للجندي، فتقوم أخذ أوزان عينة من *100* جندي من بين مجموع الجنود (المجتمع).[9]

10-2-1 العينة العشوائية

من أجل أن تكون العينة ممثلة للمجتمع، أحد الطرق المستخدمة هي العينة العشوائية، نظريا (قد يصعب تحقيق ذلك في الواقع)، نقول عن عينة أنها عشوائية إذا كان لكل مفردة في المجتمع نفس الاحتمال لأن تكون في العينة. تسمى هذه العينة بالعينة العشوائية البسيطة. لإنجاز ذلك إما أن نسحب المفردات بطريقة عشوائية أو نرقم مفردات المجتمع ثم نحدد العينة من خلال مجموعة من الأعداد تؤخذ من الجداول الإحصائية للأعداد العشوائية.

10-2-2 معالم المجتمع

نقصد بمعالم المجتمع مجموعة من خصائصه مثل المتوسط، التباين، معامل التماثل، ... ومن خصائص المجتمع أيضا طبيعة توزيعه الاحتمالي $f(x)$ كأن يكون طبيعيا أو غيره من التوزيعات الأخرى سواء كانت متقطعة او مستمرة.

ولتقدير معالم المجتمع من متوسط وتباين فإننا ننطلق من بيانات العينة،ونسمي كل قيمة تُحسب انطلاقاً من هذه البيانات بإحصائية المعاينة،ونظرياً فأن إحصائية المعاينة هي كل دالة في المتغيرات العشوائية التي تمثل القيم المُحصل عليها في العينة.

10-3 توزيع المعاينة للمتوسطات

يتضمن هذا الجزء متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات،تباين توزيع المعاينة للمتوسطات وطبيعة توزيع المعاينة للمتوسطات.

10-3-1 متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات

إذا كان μ يمثل متوسط مجتمع ما و $\overline{X}$ يمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع، فإن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(\overline{X})$ يُعبر عنها كما يأتي: $E(\overline{X}) = \mu$.

ولإثبات الحالة أعلاه:

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_i Xi\right) = \frac{1}{n}\sum_i E(Xi) = \frac{1}{n}\sum_i \mu = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

10-3-2 تباين توزيع المعاينة للمتوسطات

إذا كان μ يمثل مجتمع ما و $\overline{X}$ يمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع بالإرجاع، فإن تباين $\overline{X}$ (تباين توزيع المعاينة للمتوسطات) يكتب كما يأتي: $\sigma_{\overline{X}}{}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ حيث n يمثل حجم العينة.

ولإثبات الحالة أعلاه:

$$V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_i Xi\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i V(Xi) = \frac{1}{n^2}\sum_i \sigma^2 = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

والحالة أعلاه تقودنا الى أن ،إذا كان n يمثل حجم عينة مسحوبة من ذات المجتمع وبدون إرجاع،فإن تباين توزيع المعاينة للمتوسطات يكون كالآتي: $\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

وتسمى النسبة $\frac{N-n}{N-1}$ بمعامل الإرجاع.

10-3-3 طبيعة توزيع المتوسطات

ندرس طبيعة توزيع متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات من خلال الحالات التالية:

1. إذا كان المجتمع يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط μ وتباين σ^2 فان متوسط العينة المسحوبة من المجتمع تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2/n أي أن $\bar{X} \approx N(\mu, \sigma^2/n)$.
2. إذا كان المجتمع الذي تُسحب منه العينة ذو متوسط μ وتباين σ^2 لكن ليس بالضرورة ان يكون طبيعياً فإن المتغير المعياري لـ $\bar{X}$ أي $z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ تؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري عندما يكون n كبيراً($n \geq 30$) وتُكتب: $z \approx N(0,1)$.

ملاحظة:

في حالة المجتمع محدود والمعاينة بدون إرجاع نستبدل العبارة $\sigma/\sqrt{n}$ بالعبارة: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

عمليا يستخدم الإحصائيين هذه الصيغة المعدلة بمعامل الإرجاع للانحراف المعياري عندما $n/N \geq 0.05$.

مثال 10-1

مجتمع حجمه 900 بمتوسط $\mu = 20$ و $\sigma = 12$. أحسب المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات في حالة:

1. حجم العينة $n = 36$.

2. حجم العينة $n = 64$.

3. احسب احتمال أن يكون $\bar{X}$ محصوراً بين $20,18$ في حالة $n = 36$ ؟

الحل

1. بما أن $n = 36$ فان: $n/N = 36/900 = 0.04$

وبما أن $0.04 < 0.05 \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 12/\sqrt{36} = 2$

2. بما أن $n = 64, N = 900$ فان:

$$n/N = 64/900 = 0.071 > 0.05 \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = 12/\sqrt{64}\sqrt{\frac{900-64}{900-1}} = 1.92$$

3. $$Z_1 = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{18-20}{12/\sqrt{36}} = -1 \quad , Z_2 = \frac{22-20}{12/\sqrt{36}} = \frac{2}{2} = 1$$

وعليه فان الاحتمال هو:

$$P(18 < \bar{X} < 22) = P(Z_1 < Z < Z_2) = 0.6827$$

ملاحظة: في حالة $n = 64$ يترك حسابها للطالب.

4-10 توزيع المعاينة للنسبة

لتكن $\bar{X}$ تمثل متوسط مجتمع ما غير محدود وموزع طبيعياً حيث P نسبة المفردات في المجتمع ذات صفة معينة، ولتكن P' تمثل متوسط نسبة المفردات ذات الصفة المذكورة في العينة المسحوبة من ذات المجتمع، فان:[10]

$$E(P') = \mu_{P'} = P \quad , \sigma^2_{P'} = \frac{pq}{n}$$

وعندما $n \geq 30$: $P' \approx N(P, \sigma_{P'})$

ملاحظة:

عندما يكون المجتمع محدودا والمعاينة بدون إرجاع نضرب في معامل الإرجاع عند حساب الانحراف المعياري.

مثال10-2

لاحظت إدارة إحدى الجامعات أنه في عينة من 100 طالب، 40 منهم حصلوا أخيراً على شهادة. تريد الإدارة تقدير نسبة الطلبة الذين يحصلون على الشهادة داخل مجال يكون احتماله 90%.

الحل

نفرض أن N كبيرة بحيث أن: $n/N < 0.05$ وعليه فان:

$$P' \sim N(P, \sigma_{P'}) \Rightarrow \sigma_{P'} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.4(0.6)}{100}} \cong 0.05$$

$$P(p_1 < p' < p_2) = 0.9 = P(z_1 < Z < z_2)$$

وعليه نحصل على:

$$z_1 = -1.64 \qquad , z_2 = 1.64$$

$$p = p' \pm z(\sigma_{p'})$$

$$= 0.4 \pm 1.64(0.05) = 0.4 \pm 0.082$$

وعليه فان : $P(0.318 < P < 0.482) = 0.9$

10-5 توزيع المعاينة للفروق والمجاميع

ليكن لدينا مجتمعين إحصائيين ،سحبنا منهما عينتين عشوائيتين بحيث كانت الإحصائية للمجتمع الأول(متوسط او تباين)هي S_1 والإحصائية للمجتمع الثاني (متوسط أو تباين)هي S_2 وعليه فان الفرق للإحصائيتين يمثل متغير عشوائي له المتوسط والتباين التاليين:[9]

$$\sigma^2_{S_1-S_2} = \sigma^2_{S_1} + \sigma^2_{S_2} \quad و \quad \mu_{S_1-S_2} = \mu_{S_1} - \mu_{S_2}$$

أن طبيعة توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين هي:

في حالة $n_1, n_2 \geq 30$ فان توزيع المعاينة للمتغير المعياري للفرق بين متوسطين يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري. ونكتب: $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \approx N(0,1)$.

ملاحظة:يمكن التعامل مع جميع الحالات أعلاه أي في حالة الإحصائية كانت تمثل متوسط أو نسبة كذلك الاهتمام بالمجموع بدلاً من الفرق بين الإحصائيتين.

مثال 10-3

ليكن المجتمع U_1 : $3,7,8$ والمجتمع U_2 : $2,4$.

احسب: $\mu_{U_1-U_2}$ و $\sigma^2_{U_1-U_2}$ ؟

الحل:

$\mu_{U_1}=(3+7+8)/3=6$ و $\mu_{U_1}=(2+4)/2=3$ وعليه فان:

$$\mu_{U_1-U_2}=6-3=3$$

وبالأسلوب نفسه نحسب المطلوب الثاني(يترك تمرين).

10-6 توزيع المعاينة للتباين وتوزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين

إذا كانت μ يمثل متوسط مجتمع ما و S^2 متغير يمثل تباين عينة مسحوبة بالإرجاع (أو بدون إرجاع من مجتمع غير محدود) حجمها n ، فإن :

$E(S^2)=\mu_{S^2}=\sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$ عندما $n\geq 30$ فان: $E(S^2)\approx\sigma^2$.

ولإثبات الحالة أعلاه :

$$E(S^2)=E\left[\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2\right]=E\left[\frac{1}{n}\sum(x_i^2-\bar{x})^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sum E(x_i^2)-E(\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_i(V(X)+\mu^2)-\left[V(\bar{X})+E(\bar{X})^2\right]$$

$$=\sigma^2+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}-\mu^2=\sigma^2(1-\frac{1}{n})=\sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

إذا أخذنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي، فإن :

$$\frac{nS^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$$

مثال 10-4

ليكن لدينا مجتمع طبيعي حجمه *100* نسحب منه عينة حجمها $n=16$. ما هو احتمال أن يكون تباين العينة S^2 أقل من أو يساوي *10* علما أن تباين المجتمع *80*.

الحل

$$P(S^2 \le 10) = P(\chi_{16-1}^2 \le 2) = P(S^2 \frac{16}{80} \le X \sim N(\mu, \sigma))$$

وعليه فان: $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ ومن جدول كاي سكوير نحصل:

$$P(\chi_{15}^2 \le 2) < 0.005$$

أما إذا كانت μ تمثل متوسط مجتمع ما محدود و S^2 متغير يمثل تباين عينة مسحوبة بدون إرجاع من ذات المجتمع، فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة تُكتب كما يأتي: $E(S^2) = \mu_{S^2} = \sigma^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)$

عندما N كبيرة جداً فان $\frac{N}{N-1}$ تؤول الى الواحد.

وإذا كان لدينا مجتمعان طبيعيان تبايناهما σ_1^2 ، σ_2^2 ، نسحب من المجتمعين عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي n_1 , n_2 فان:

$$F = \frac{\left[\frac{S_1^2 n_1}{n_1 - 1}\right]\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left[\frac{S_2^2 n_2}{n_2 - 1}\right]\frac{1}{\sigma_1^2}} = \frac{\hat{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\hat{S}_2^2 / \sigma_2^2} \rightarrow F_{n_1 - 1 ; n_2 - 1}$$

مثال 10-5

عينتين حجمهما *8* و *10* مسحوبتين من مجتمعين طبيعيين تبايناهما على التوالي *20* و *36*. ما احتمال أن يكون تباين الأولى أكبر من ضعف تباين الثانية؟

الحل

$$P(S_1^2 > 2S_2^2 = P(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 2) = P\left(\frac{S_1^2\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{S_2^2\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}} > 2\,\frac{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left(\frac{n2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}}\right)$$

$$= P\left(\frac{S_1^2\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{S_2^2\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}} > 2\,\frac{\left(\frac{8}{7}\right)\frac{1}{20}}{\left(\frac{10}{9}\right)\frac{1}{36}}\right)$$

$$= P(F_{7,9} > 3.7)$$

ومن جداول توزيع F نحصل على: $0.05 > P(F_{7,9} > 3.7) > 0.01$

تمارين الفصل العاشر

1. مجتمع طبيعي حجمه 50 سُحبت منه عينة حجمها 10. ما هو احتمال أن يكون تباين العينة أقل من أو يساوي 5 علما أن تباين المجتمع 45.
2. مجتمع حجمه 500 ومتوسطة 10 وانحرافة المعياري 6. أحسب
3. احتمال أن يكون $\overline{X}$ محصوراً بين 16 ,13 في حالة $n = 30$ ؟
4. في شركة لإنتاج المصابيح تبين أن عينة حجمها 90 مصباح ،بينها 50 مصباح صالح للعمل ،وترغب الشركة بتقدير نسبة المصابيح الصالحة للعمل ضمن فترة احتمالها 80٪؟
5. إذا كان m يمثل متوسط مجتمع ما و $\overline{m}$ يمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع، عبر رياضياً عن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة ؟

الملاحق

(الملحق رقم 1)جدول التوزيع الطبيعي

(الملحق رقم 2)جدول توزيع ثنائي الحدين

(الملحق رقم 3)جدول توزيع بوسون

(الملحق رقم 4)جدول توزيع كاي- سكوير

(الملحق رقم 5)جدول توزيع t

(الملحق رقم 6)جدول توزيع F



الملاحق

(الملحق رقم 1)جدول التوزيع الطبيعي

Standard Normal Cumulative Probability Table

Cumulative probabilities for NEGATIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Standard Normal Cumulative Probability Table

Cumulative probabilities for POSITIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

(الملحق رقم 2)جدول توزيع ثنائي الحدين

		p											
	x	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
n=1	0	.9900	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000	1
	1	.0100	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000	0
n=2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500	2
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000	1
	2	.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500	0
n=3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250	3
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750	2
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750	1
	3		.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250	0
n=4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625	4
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500	3
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750	2
	3		.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500	1
	4			.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625	0
n=5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0313	5
	1	.0480	.2036	.3281	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1563	4
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125	3
	3		.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125	2
	4			.0005	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1563	1
	5				.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0313	0
n=6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156	6
	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938	5
	2	.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344	4
	3		.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125	3
	4		.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344	2
	5			.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938	1
	6					.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156	0
n=7	0	.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078	7
	1	.0659	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547	6
	2	.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641	5
	3		.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734	4
	4		.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734	3
	5			.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641	2
	6				.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547	1
	7						.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078	0
n=8	0	.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039	8
	1	.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0313	7
	2	.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094	6
	3	.0001	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188	5
	4		.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734	4
	5			.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188	3
	6				.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094	2
	7					.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0313	1
	8							.0001	.0002	.0007	.0017	.0039	0
		0.99	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	x
		p											

	x	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25 (p)	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
n=9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020	9
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176	8
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703	7
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641	6
	4		0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461	5
	5			0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461	4
	6			0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641	3
	7					0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703	2
	8						0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176	1
	9								0.0001	0.0003	0.0008	0.0020	0
n=10	0	0.9044	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	10
	1	0.0914	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098	9
	2	0.0042	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439	8
	3	0.0001	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172	7
	4		0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051	6
	5		0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461	5
	6			0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051	4
	7				0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172	3
	8					0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439	2
	9							0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098	1
	10									0.0001	0.0003	0.0010	0
n=11	0	0.8953	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005	11
	1	0.0995	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054	10
	2	0.0050	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0513	0.0269	9
	3	0.0002	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806	8
	4		0.0014	0.0158	0.0536	0.1107	0.1721	0.2201	0.2428	0.2365	0.2060	0.1611	7
	5		0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256	6
	6			0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256	5
	7				0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611	4
	8					0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806	3
	9						0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269	2
	10								0.0002	0.0007	0.0021	0.0054	1
	11										0.0002	0.0005	0
n=12	0	0.8864	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002	12
	1	0.1074	0.3413	0.3766	0.3012	0.2062	0.1267	0.0712	0.0368	0.0174	0.0075	0.0029	11
	2	0.0060	0.0988	0.2301	0.2924	0.2835	0.2323	0.1678	0.1088	0.0639	0.0339	0.0161	10
	3	0.0002	0.0173	0.0852	0.1720	0.2362	0.2581	0.2397	0.1954	0.1419	0.0923	0.0537	9
	4		0.0021	0.0213	0.0683	0.1329	0.1936	0.2311	0.2367	0.2128	0.1700	0.1208	8
	5		0.0002	0.0038	0.0193	0.0532	0.1032	0.1585	0.2039	0.2270	0.2225	0.1934	7
	6			0.0005	0.0040	0.0155	0.0401	0.0792	0.1281	0.1766	0.2124	0.2256	6
	7				0.0006	0.0033	0.0115	0.0291	0.0591	0.1009	0.1489	0.1934	5
	8				0.0001	0.0005	0.0024	0.0078	0.0199	0.0420	0.0762	0.1208	4
	9					0.0001	0.0004	0.0015	0.0048	0.0125	0.0277	0.0537	3
	10							0.0002	0.0008	0.0025	0.0068	0.0161	2
	11								0.0001	0.0003	0.0010	0.0029	1
	12										0.0001	0.0002	0
n=13	0	0.8775	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001	13
	1	0.1152	0.3512	0.3672	0.2774	0.1787	0.1029	0.0540	0.0259	0.0113	0.0045	0.0016	12
	2	0.0070	0.1109	0.2448	0.2937	0.2680	0.2059	0.1388	0.0836	0.0453	0.0220	0.0095	11
	3	0.0003	0.0214	0.0997	0.1900	0.2457	0.2517	0.2181	0.1651	0.1107	0.0660	0.0349	10
	4		0.0028	0.0277	0.0838	0.1535	0.2097	0.2337	0.2222	0.1845	0.1350	0.0873	9
	5		0.0003	0.0055	0.0266	0.0691	0.1258	0.1803	0.2154	0.2214	0.1989	0.1571	8
	6			0.0008	0.0063	0.0230	0.0559	0.1030	0.1546	0.1968	0.2169	0.2095	7
	7			0.0001	0.0011	0.0058	0.0186	0.0442	0.0833	0.1312	0.1775	0.2095	6
	8				0.0001	0.0011	0.0047	0.0142	0.0336	0.0656	0.1089	0.1571	5
	9					0.0001	0.0009	0.0034	0.0101	0.0243	0.0495	0.0873	4
	10						0.0001	0.0006	0.0022	0.0065	0.0162	0.0349	3
	11							0.0001	0.0003	0.0012	0.0036	0.0095	2
	12									0.0001	0.0005	0.0016	1
	13											0.0001	0
		0.99	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75 (p)	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	x

	x	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
							p						
n=14	0	0.8687	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001	14
	1	0.1229	0.3593	0.3559	0.2539	0.1539	0.0832	0.0407	0.0181	0.0073	0.0027	0.0009	13
	2	0.0081	0.1229	0.2570	0.2912	0.2501	0.1802	0.1134	0.0634	0.0317	0.0141	0.0056	12
	3	0.0003	0.0259	0.1142	0.2056	0.2501	0.2402	0.1943	0.1366	0.0845	0.0462	0.0222	11
	4		0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611	10
	5		0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222	9
	6			0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833	8
	7			0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095	7
	8				0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833	6
	9					0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222	5
	10						0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611	4
	11							0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222	3
	12								0.0001	0.0005	0.0019	0.0056	2
	13									0.0001	0.0002	0.0009	1
	14											0.0001	0
n=15	0	0.8601	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001		15
	1	0.1303	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005	14
	2	0.0092	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032	13
	3	0.0004	0.0307	0.1285	0.2184	0.2501	0.2252	0.1700	0.1110	0.0634	0.0318	0.0139	12
	4		0.0049	0.0428	0.1156	0.1876	0.2252	0.2186	0.1792	0.1268	0.0780	0.0417	11
	5		0.0006	0.0105	0.0449	0.1032	0.1651	0.2061	0.2123	0.1859	0.1404	0.0916	10
	6			0.0019	0.0132	0.0430	0.0917	0.1472	0.1906	0.2066	0.1914	0.1527	9
	7			0.0003	0.0030	0.0138	0.0393	0.0811	0.1319	0.1771	0.2013	0.1964	8
	8				0.0005	0.0035	0.0131	0.0348	0.0710	0.1181	0.1647	0.1964	7
	9				0.0001	0.0007	0.0034	0.0116	0.0298	0.0612	0.1048	0.1527	6
	10					0.0001	0.0007	0.0030	0.0096	0.0245	0.0515	0.0916	5
	11						0.0001	0.0006	0.0024	0.0074	0.0191	0.0417	4
	12							0.0001	0.0004	0.0016	0.0052	0.0139	3
	13								0.0001	0.0003	0.0010	0.0032	2
	14										0.0001	0.0005	1
	15												0
n=16	0	0.8515	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001		16
	1	0.1376	0.3706	0.3294	0.2097	0.1126	0.0535	0.0228	0.0087	0.0030	0.0009	0.0002	15
	2	0.0104	0.1463	0.2745	0.2775	0.2111	0.1336	0.0732	0.0353	0.0150	0.0056	0.0018	14
	3	0.0005	0.0359	0.1423	0.2285	0.2463	0.2079	0.1465	0.0888	0.0468	0.0215	0.0085	13
	4		0.0061	0.0514	0.1311	0.2001	0.2252	0.2040	0.1553	0.1014	0.0572	0.0278	12
	5		0.0008	0.0137	0.0555	0.1201	0.1802	0.2099	0.2008	0.1623	0.1123	0.0667	11
	6		0.0001	0.0028	0.0180	0.0550	0.1101	0.1649	0.1962	0.1983	0.1684	0.1222	10
	7			0.0004	0.0045	0.0197	0.0524	0.1010	0.1524	0.1889	0.1969	0.1746	9
	8			0.0001	0.0009	0.0055	0.0197	0.0487	0.0923	0.1417	0.1812	0.1964	8
	9				0.0001	0.0012	0.0058	0.0185	0.0442	0.0840	0.1318	0.1746	7
	10					0.0002	0.0014	0.0056	0.0167	0.0392	0.0755	0.1222	6
	11						0.0002	0.0013	0.0049	0.0142	0.0337	0.0667	5
	12							0.0002	0.0011	0.0040	0.0115	0.0278	4
	13							0.0000	0.0002	0.0008	0.0029	0.0085	3
	14									0.0001	0.0005	0.0018	2
	15										0.0001	0.0002	1
	16												0
n=17	0	0.8429	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002			17
	1	0.1447	0.3741	0.3150	0.1893	0.0957	0.0426	0.0169	0.0060	0.0019	0.0005	0.0001	16
	2	0.0117	0.1575	0.2800	0.2673	0.1914	0.1136	0.0581	0.0260	0.0102	0.0035	0.0010	15
	3	0.0006	0.0415	0.1556	0.2359	0.2393	0.1893	0.1245	0.0701	0.0341	0.0144	0.0052	14
	4		0.0076	0.0605	0.1457	0.2093	0.2209	0.1868	0.1320	0.0796	0.0411	0.0182	13
	5		0.0010	0.0175	0.0668	0.1361	0.1914	0.2081	0.1849	0.1379	0.0875	0.0472	12
	6		0.0001	0.0039	0.0236	0.0680	0.1276	0.1784	0.1991	0.1839	0.1432	0.0944	11
	7			0.0007	0.0065	0.0267	0.0668	0.1201	0.1685	0.1927	0.1841	0.1484	10
	8			0.0001	0.0014	0.0084	0.0279	0.0644	0.1134	0.1606	0.1883	0.1855	9
	9				0.0003	0.0021	0.0093	0.0276	0.0611	0.1070	0.1540	0.1855	8
	10					0.0004	0.0025	0.0095	0.0263	0.0571	0.1008	0.1484	7
	11					0.0001	0.0005	0.0026	0.0090	0.0242	0.0525	0.0944	6
	12						0.0001	0.0006	0.0024	0.0081	0.0215	0.0472	5
	13							0.0001	0.0005	0.0021	0.0068	0.0182	4
	14								0.0001	0.0004	0.0016	0.0052	3
	15									0.0001	0.0003	0.0010	2
	16											0.0001	1
	17												0
		0.99	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	x
							p						

	x	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	p 0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
n=18	0	0.8345	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001			18
	1	0.1517	0.3763	0.3002	0.1704	0.0811	0.0338	0.0126	0.0042	0.0012	0.0003	0.0001	17
	2	0.0130	0.1683	0.2835	0.2556	0.1723	0.0958	0.0458	0.0190	0.0069	0.0022	0.0006	16
	3	0.0007	0.0473	0.1680	0.2406	0.2297	0.1704	0.1046	0.0547	0.0246	0.0095	0.0031	15
	4		0.0093	0.0700	0.1592	0.2153	0.2130	0.1681	0.1104	0.0614	0.0291	0.0117	14
	5		0.0014	0.0218	0.0787	0.1507	0.1988	0.2017	0.1664	0.1146	0.0666	0.0327	13
	6		0.0002	0.0052	0.0301	0.0816	0.1436	0.1873	0.1941	0.1655	0.1181	0.0708	12
	7			0.0010	0.0091	0.0350	0.0820	0.1376	0.1792	0.1892	0.1657	0.1214	11
	8			0.0002	0.0022	0.0120	0.0376	0.0811	0.1327	0.1734	0.1864	0.1669	10
	9				0.0004	0.0033	0.0139	0.0386	0.0794	0.1284	0.1694	0.1855	9
	10				0.0001	0.0008	0.0042	0.0149	0.0385	0.0771	0.1248	0.1669	8
	11					0.0001	0.0010	0.0046	0.0151	0.0374	0.0742	0.1214	7
	12						0.0002	0.0012	0.0047	0.0145	0.0354	0.0708	6
	13							0.0002	0.0012	0.0045	0.0134	0.0327	5
	14								0.0002	0.0011	0.0039	0.0117	4
	15									0.0002	0.0009	0.0031	3
	16										0.0001	0.0006	2
	17											0.0001	1
	18												0
n=19	0	0.8262	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001			19
	1	0.1586	0.3774	0.2852	0.1529	0.0685	0.0268	0.0093	0.0029	0.0008	0.0002		18
	2	0.0144	0.1787	0.2852	0.2428	0.1540	0.0803	0.0358	0.0138	0.0046	0.0013	0.0003	17
	3	0.0008	0.0533	0.1796	0.2428	0.2182	0.1517	0.0869	0.0422	0.0175	0.0062	0.0018	16
	4		0.0112	0.0798	0.1714	0.2182	0.2023	0.1491	0.0909	0.0467	0.0203	0.0074	15
	5		0.0018	0.0266	0.0907	0.1636	0.2023	0.1916	0.1468	0.0933	0.0497	0.0222	14
	6		0.0002	0.0069	0.0374	0.0955	0.1574	0.1916	0.1844	0.1451	0.0949	0.0518	13
	7			0.0014	0.0122	0.0443	0.0974	0.1525	0.1844	0.1797	0.1443	0.0961	12
	8			0.0002	0.0032	0.0166	0.0487	0.0981	0.1489	0.1797	0.1771	0.1442	11
	9				0.0007	0.0051	0.0198	0.0514	0.0980	0.1464	0.1771	0.1762	10
	10				0.0001	0.0013	0.0066	0.0220	0.0528	0.0976	0.1449	0.1762	9
	11					0.0003	0.0018	0.0077	0.0233	0.0532	0.0970	0.1442	8
	12						0.0004	0.0022	0.0083	0.0237	0.0529	0.0961	7
	13						0.0001	0.0005	0.0024	0.0085	0.0233	0.0518	6
	14							0.0001	0.0006	0.0024	0.0082	0.0222	5
	15								0.0001	0.0005	0.0022	0.0074	4
	16									0.0001	0.0005	0.0018	3
	17										0.0001	0.0003	2
	18												1
	19												0
n=20	0	0.8179	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002				20
	1	0.1652	0.3774	0.2702	0.1368	0.0576	0.0211	0.0068	0.0020	0.0005	0.0001		19
	2	0.0159	0.1887	0.2852	0.2293	0.1369	0.0669	0.0278	0.0100	0.0031	0.0008	0.0002	18
	3	0.0010	0.0596	0.1901	0.2428	0.2054	0.1339	0.0716	0.0323	0.0123	0.0040	0.0011	17
	4		0.0133	0.0898	0.1821	0.2182	0.1897	0.1304	0.0738	0.0350	0.0139	0.0046	16
	5		0.0022	0.0319	0.1028	0.1746	0.2023	0.1789	0.1272	0.0746	0.0365	0.0148	15
	6		0.0003	0.0089	0.0454	0.1091	0.1686	0.1916	0.1712	0.1244	0.0746	0.0370	14
	7			0.0020	0.0160	0.0545	0.1124	0.1643	0.1844	0.1659	0.1221	0.0739	13
	8			0.0004	0.0046	0.0222	0.0609	0.1144	0.1614	0.1797	0.1623	0.1201	12
	9			0.0001	0.0011	0.0074	0.0271	0.0654	0.1158	0.1597	0.1771	0.1602	11
	10				0.0002	0.0020	0.0099	0.0308	0.0686	0.1171	0.1593	0.1762	10
	11					0.0005	0.0030	0.0120	0.0336	0.0710	0.1185	0.1602	9
	12					0.0001	0.0008	0.0039	0.0136	0.0355	0.0727	0.1201	8
	13						0.0002	0.0010	0.0045	0.0146	0.0366	0.0739	7
	14							0.0002	0.0012	0.0049	0.0150	0.0370	6
	15								0.0003	0.0013	0.0049	0.0148	5
	16									0.0003	0.0013	0.0046	4
	17										0.0002	0.0011	3
	18											0.0002	2
	19												1
	20												0
		0.99	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75 p	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	x

(الملحق رقم 3)جدول توزيع بوسون

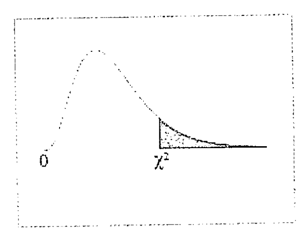
x	α 0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0	0.6065	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.9098	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9856	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9982	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9998	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	1.0000	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	1.0000	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	α 5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005
23	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857
18	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	10.5	11	11.5	12	α 12.5	13	13.5	14	14.5	15
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0018	0.0012	0.0008	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
3	0.0071	0.0049	0.0034	0.0023	0.0016	0.0011	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002
4	0.0211	0.0151	0.0107	0.0076	0.0053	0.0037	0.0026	0.0018	0.0012	0.0009
5	0.0504	0.0375	0.0277	0.0203	0.0148	0.0107	0.0077	0.0055	0.0039	0.0028
6	0.1016	0.0786	0.0603	0.0458	0.0346	0.0259	0.0193	0.0142	0.0105	0.0076
7	0.1785	0.1432	0.1137	0.0895	0.0698	0.0540	0.0415	0.0316	0.0239	0.0180
8	0.2794	0.2320	0.1906	0.1550	0.1249	0.0998	0.0790	0.0621	0.0484	0.0374
9	0.3971	0.3405	0.2888	0.2424	0.2014	0.1658	0.1353	0.1094	0.0878	0.0699
10	0.5207	0.4599	0.4017	0.3472	0.2971	0.2517	0.2112	0.1757	0.1449	0.1185
11	0.6387	0.5793	0.5198	0.4616	0.4058	0.3532	0.3045	0.2600	0.2201	0.1848
12	0.7420	0.6887	0.6329	0.5760	0.5190	0.4631	0.4093	0.3585	0.3111	0.2676
13	0.8253	0.7813	0.7330	0.6815	0.6278	0.5730	0.5182	0.4644	0.4125	0.3632
14	0.8879	0.8540	0.8153	0.7720	0.7250	0.6751	0.6233	0.5704	0.5176	0.4657
15	0.9317	0.9074	0.8783	0.8444	0.8060	0.7636	0.7178	0.6694	0.6192	0.5681
16	0.9604	0.9441	0.9236	0.8987	0.8693	0.8355	0.7975	0.7559	0.7112	0.6641
17	0.9781	0.9678	0.9542	0.9370	0.9158	0.8905	0.8609	0.8272	0.7897	0.7489
18	0.9885	0.9823	0.9738	0.9626	0.9481	0.9302	0.9084	0.8826	0.8530	0.8195
19	0.9942	0.9907	0.9857	0.9787	0.9694	0.9573	0.9421	0.9235	0.9012	0.8752
20	0.9972	0.9953	0.9925	0.9884	0.9827	0.9750	0.9649	0.9521	0.9362	0.9170
21	0.9987	0.9977	0.9962	0.9939	0.9906	0.9859	0.9796	0.9712	0.9604	0.9469
22	0.9994	0.9990	0.9982	0.9970	0.9951	0.9924	0.9885	0.9833	0.9763	0.9673
23	0.9998	0.9995	0.9992	0.9985	0.9975	0.9960	0.9938	0.9907	0.9863	0.9805
24	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9988	0.9980	0.9968	0.9950	0.9924	0.9888
25	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9990	0.9984	0.9974	0.9959	0.9938
26	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9979	0.9967
27	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9989	0.9983
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9991
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9998	0.9996
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(الملحق رقم 4)جدول توزيع كاي- سكوير

Chi-Square Distribution Table



The shaded area is equal to α for $\chi^2 = \chi^2_\alpha$.

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

(الملحق رقم 5)جدول توزيع t [11]

PERCENTAGE POINTS OF THE T DISTRIBUTION

Tail Probabilities								
One Tail	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005	
Two Tails	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001	
DEGREES OF FREEDOM 1	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3	637	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.330	31.6	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.210	12.92	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659	29
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646	30
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622	32
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601	34
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582	36
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566	38
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551	40
42	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296	3.538	42
44	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286	3.526	44
46	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277	3.515	46
48	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269	3.505	48
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496	50
55	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245	3.476	55
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460	60
65	1.295	1.669	1.997	2.385	2.654	3.220	3.447	65
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435	70
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416	80
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390	100
150	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609	3.145	3.357	150
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340	200
Two Tails	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001	
One Tail	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005	
Tail Probabilities								

(الملحق رقم 6) جدول توزيع F

95% POINTS FOR THE F DISTRIBUTION Page 1

Numerator Degrees of Freedom

Denominator Degrees of Freedom

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	1
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	2
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	3
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	4
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	5
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	6
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	7
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	8
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	9
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	10
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	11
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	12
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	13
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	14
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	15
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	16
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	17
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	18
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	19
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	20
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	21
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	22
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	23
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	24
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	25
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	26
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	27
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	28
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	29
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	30
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11	35
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	40
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	50
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	60
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	70
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	80
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	100
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	150
300	3.87	3.03	2.63	2.40	2.24	2.13	2.04	1.97	1.91	1.86	300
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1000
*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*

95% Points for the F Distribution -- page 2

Numerator Degrees of Freedom

Denominator Degrees of Freedom

*	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	*
1	243	244	245	245	246	246	247	247	248	248	1
2	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	2
3	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66	3
4	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80	4
5	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60	4.59	4.58	4.57	4.56	5
6	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92	3.91	3.90	3.88	3.87	6
7	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44	7
8	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20	3.19	3.17	3.16	3.15	8
9	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94	9
10	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77	10
11	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70	2.69	2.67	2.66	2.65	11
12	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54	12
13	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46	13
14	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.40	2.39	14
15	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33	15
16	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28	16
17	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	17
18	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	18
19	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16	19
20	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	20
21	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.16	2.14	2.12	2.11	2.10	21
22	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07	22
23	2.24	2.20	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.08	2.06	2.05	23
24	2.22	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.03	24
25	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.02	2.01	25
26	2.18	2.15	2.12	2.09	2.07	2.05	2.03	2.02	2.00	1.99	26
27	2.17	2.13	2.10	2.08	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	27
28	2.15	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96	28
29	2.14	2.10	2.08	2.05	2.03	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	29
30	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93	30
35	2.07	2.04	2.01	1.99	1.96	1.94	1.92	1.91	1.89	1.88	35
40	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92	1.90	1.89	1.87	1.85	1.84	40
50	1.99	1.95	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	50
60	1.95	1.92	1.89	1.86	1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.75	60
70	1.93	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.77	1.75	1.74	1.72	70
80	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	80
100	1.89	1.85	1.82	1.79	1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.68	100
150	1.85	1.82	1.79	1.76	1.73	1.71	1.69	1.67	1.66	1.64	150
300	1.82	1.78	1.75	1.72	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62	1.61	300
1000	1.80	1.76	1.73	1.70	1.68	1.65	1.63	1.61	1.60	1.58	1000
*	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	*

xt_page, header page, of this table

95% Points for the F Distribution -- page 3

Numerator Degrees of Freedom (columns); Denominator Degrees of Freedom (rows)

*	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	*
1	248	249	249	249	249	249	250	250	250	250	1
2	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	2
3	8.65	8.65	8.64	8.64	8.63	8.63	8.63	8.62	8.62	8.62	3
4	5.79	5.79	5.78	5.77	5.77	5.76	5.76	5.75	5.75	5.75	4
5	4.55	4.54	4.53	4.53	4.52	4.52	4.51	4.50	4.50	4.50	5
6	3.86	3.86	3.85	3.84	3.83	3.83	3.82	3.82	3.81	3.81	6
7	3.43	3.43	3.42	3.41	3.40	3.40	3.39	3.39	3.38	3.38	7
8	3.14	3.13	3.12	3.12	3.11	3.10	3.10	3.09	3.08	3.08	8
9	2.93	2.92	2.91	2.90	2.89	2.89	2.88	2.87	2.87	2.86	9
10	2.76	2.75	2.75	2.74	2.73	2.72	2.72	2.71	2.70	2.70	10
11	2.64	2.63	2.62	2.61	2.60	2.59	2.59	2.58	2.58	2.57	11
12	2.53	2.52	2.51	2.51	2.50	2.49	2.48	2.48	2.47	2.47	12
13	2.45	2.44	2.43	2.42	2.41	2.41	2.40	2.39	2.39	2.38	13
14	2.38	2.37	2.36	2.35	2.34	2.33	2.33	2.32	2.31	2.31	14
15	2.32	2.31	2.30	2.29	2.28	2.27	2.27	2.26	2.25	2.25	15
16	2.26	2.25	2.24	2.24	2.23	2.22	2.21	2.21	2.20	2.19	16
17	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.17	2.17	2.16	2.15	2.15	17
18	2.18	2.17	2.16	2.15	2.14	2.13	2.13	2.12	2.11	2.11	18
19	2.14	2.13	2.12	2.11	2.11	2.10	2.09	2.08	2.08	2.07	19
20	2.11	2.10	2.09	2.08	2.07	2.07	2.06	2.05	2.05	2.04	20
21	2.08	2.07	2.06	2.05	2.05	2.04	2.03	2.02	2.02	2.01	21
22	2.06	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.00	2.00	1.99	1.98	22
23	2.04	2.02	2.01	2.01	2.00	1.99	1.98	1.97	1.97	1.96	23
24	2.01	2.00	1.99	1.98	1.97	1.97	1.96	1.95	1.95	1.94	24
25	2.00	1.98	1.97	1.96	1.96	1.95	1.94	1.93	1.93	1.92	25
26	1.98	1.97	1.96	1.95	1.94	1.93	1.92	1.91	1.91	1.90	26
27	1.96	1.95	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90	1.90	1.89	1.88	27
28	1.95	1.93	1.92	1.91	1.91	1.90	1.89	1.88	1.88	1.87	28
29	1.93	1.92	1.91	1.90	1.89	1.88	1.88	1.87	1.86	1.85	29
30	1.92	1.91	1.90	1.89	1.88	1.87	1.86	1.85	1.85	1.84	30
35	1.87	1.85	1.84	1.83	1.82	1.82	1.81	1.80	1.79	1.79	35
40	1.83	1.81	1.80	1.79	1.78	1.77	1.77	1.76	1.75	1.74	40
50	1.77	1.76	1.75	1.74	1.73	1.72	1.71	1.70	1.69	1.69	50
60	1.73	1.72	1.71	1.70	1.69	1.68	1.67	1.66	1.66	1.65	60
70	1.71	1.70	1.68	1.67	1.66	1.65	1.65	1.64	1.63	1.62	70
80	1.69	1.68	1.67	1.65	1.64	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	80
100	1.66	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	100
150	1.63	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.54	150
300	1.59	1.58	1.57	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	300
1000	1.57	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1000
*	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	*

of this table

95% Points for the F Distribution -- page 4

Numerator Degrees of Freedom

Denominator Degrees of Freedom

*	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	*
1	250	250	250	251	251	251	251	251	251	251	1
2	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	2
3	8.61	8.61	8.61	8.61	8.60	8.60	8.60	8.60	8.60	8.59	3
4	5.74	5.74	5.74	5.73	5.73	5.73	5.72	5.72	5.72	5.72	4
5	4.49	4.49	4.48	4.48	4.48	4.47	4.47	4.47	4.47	4.46	5
6	3.80	3.80	3.80	3.79	3.79	3.79	3.78	3.78	3.78	3.77	6
7	3.37	3.37	3.36	3.36	3.36	3.35	3.35	3.35	3.34	3.34	7
8	3.07	3.07	3.07	3.06	3.06	3.06	3.05	3.05	3.05	3.04	8
9	2.86	2.85	2.85	2.85	2.84	2.84	2.84	2.83	2.83	2.83	9
10	2.69	2.69	2.69	2.68	2.68	2.67	2.67	2.67	2.66	2.66	10
11	2.57	2.56	2.56	2.55	2.55	2.54	2.54	2.54	2.53	2.53	11
12	2.46	2.46	2.45	2.45	2.44	2.44	2.44	2.43	2.43	2.43	12
13	2.38	2.37	2.37	2.36	2.36	2.35	2.35	2.35	2.34	2.34	13
14	2.30	2.30	2.29	2.29	2.28	2.28	2.28	2.27	2.27	2.27	14
15	2.24	2.24	2.23	2.23	2.22	2.22	2.21	2.21	2.21	2.20	15
16	2.19	2.18	2.18	2.17	2.17	2.17	2.16	2.16	2.15	2.15	16
17	2.14	2.14	2.13	2.13	2.12	2.12	2.11	2.11	2.11	2.10	17
18	2.10	2.10	2.09	2.09	2.08	2.08	2.07	2.07	2.07	2.06	18
19	2.07	2.06	2.06	2.05	2.05	2.04	2.04	2.03	2.03	2.03	19
20	2.03	2.03	2.02	2.02	2.01	2.01	2.01	2.00	2.00	1.99	20
21	2.00	2.00	1.99	1.99	1.98	1.98	1.98	1.97	1.97	1.96	21
22	1.98	1.97	1.97	1.96	1.96	1.95	1.95	1.95	1.94	1.94	22
23	1.95	1.95	1.94	1.94	1.93	1.93	1.93	1.92	1.92	1.91	23
24	1.93	1.93	1.92	1.92	1.91	1.91	1.90	1.90	1.90	1.89	24
25	1.91	1.91	1.90	1.90	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.87	25
26	1.89	1.89	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87	1.86	1.86	1.85	26
27	1.88	1.87	1.87	1.86	1.86	1.85	1.85	1.84	1.84	1.84	27
28	1.86	1.86	1.85	1.85	1.84	1.84	1.83	1.83	1.82	1.82	28
29	1.85	1.84	1.84	1.83	1.83	1.82	1.82	1.81	1.81	1.81	29
30	1.83	1.83	1.82	1.82	1.81	1.81	1.80	1.80	1.80	1.79	30
35	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74	35
40	1.74	1.73	1.73	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	40
50	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.65	1.65	1.64	1.64	1.63	50
60	1.64	1.64	1.63	1.62	1.62	1.61	1.61	1.60	1.60	1.59	60
70	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58	1.57	1.57	70
80	1.59	1.59	1.58	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54	80
100	1.57	1.56	1.55	1.55	1.54	1.54	1.53	1.52	1.52	1.52	100
150	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49	1.49	1.48	1.48	150
300	1.49	1.48	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.45	1.44	1.43	300
1000	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.42	1.42	1.41	1.41	1000
*	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	*

xt page, eader page, of this table

95% Points of the F distribution -- page 5

Numerator Degrees of Freedom

Denominator Degrees of Freedom

*	45	50	60	70	80	100	120	150	300	1000	*
1	251	252	252	252	253	253	253	253	254	254	1
2	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	2
3	8.59	8.58	8.57	8.57	8.56	8.55	8.55	8.54	8.54	8.53	3
4	5.71	5.70	5.69	5.68	5.67	5.66	5.66	5.65	5.64	5.63	4
5	4.45	4.44	4.43	4.42	4.41	4.41	4.40	4.39	4.38	4.37	5
6	3.76	3.75	3.74	3.73	3.72	3.71	3.70	3.70	3.68	3.67	6
7	3.33	3.32	3.30	3.29	3.29	3.27	3.27	3.26	3.24	3.23	7
8	3.03	3.02	3.01	2.99	2.99	2.97	2.97	2.96	2.94	2.93	8
9	2.81	2.80	2.79	2.78	2.77	2.76	2.75	2.74	2.72	2.71	9
10	2.65	2.64	2.62	2.61	2.60	2.59	2.58	2.57	2.55	2.54	10
11	2.52	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.45	2.44	2.42	2.41	11
12	2.41	2.40	2.38	2.37	2.36	2.35	2.34	2.33	2.31	2.30	12
13	2.33	2.31	2.30	2.28	2.27	2.26	2.25	2.24	2.23	2.21	13
14	2.25	2.24	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.17	2.15	2.14	14
15	2.19	2.18	2.16	2.15	2.14	2.12	2.11	2.10	2.09	2.07	15
16	2.14	2.12	2.11	2.09	2.08	2.07	2.06	2.05	2.03	2.02	16
17	2.09	2.08	2.06	2.05	2.03	2.02	2.01	2.00	1.98	1.97	17
18	2.05	2.04	2.02	2.00	1.99	1.98	1.97	1.96	1.94	1.92	18
19	2.01	2.00	1.98	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.90	1.88	19
20	1.98	1.97	1.95	1.93	1.92	1.91	1.90	1.89	1.86	1.85	20
21	1.95	1.94	1.92	1.90	1.89	1.88	1.87	1.86	1.83	1.82	21
22	1.92	1.91	1.89	1.88	1.86	1.85	1.84	1.83	1.81	1.79	22
23	1.90	1.88	1.86	1.85	1.84	1.82	1.81	1.80	1.78	1.76	23
24	1.88	1.86	1.84	1.83	1.82	1.80	1.79	1.78	1.76	1.74	24
25	1.86	1.84	1.82	1.81	1.80	1.78	1.77	1.76	1.73	1.72	25
26	1.84	1.82	1.80	1.79	1.78	1.76	1.75	1.74	1.71	1.70	26
27	1.82	1.81	1.79	1.77	1.76	1.74	1.73	1.72	1.70	1.68	27
28	1.80	1.79	1.77	1.75	1.74	1.73	1.71	1.70	1.68	1.66	28
29	1.79	1.77	1.75	1.74	1.73	1.71	1.70	1.69	1.66	1.65	29
30	1.77	1.76	1.74	1.72	1.71	1.70	1.68	1.67	1.65	1.63	30
35	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.63	1.62	1.61	1.58	1.57	35
40	1.67	1.66	1.64	1.62	1.61	1.59	1.58	1.56	1.54	1.52	40
50	1.61	1.60	1.58	1.56	1.54	1.52	1.51	1.50	1.47	1.45	50
60	1.57	1.56	1.53	1.52	1.50	1.48	1.47	1.45	1.42	1.40	60
70	1.55	1.53	1.50	1.49	1.47	1.45	1.44	1.42	1.39	1.36	70
80	1.52	1.51	1.48	1.46	1.45	1.43	1.41	1.39	1.36	1.34	80
100	1.49	1.48	1.45	1.43	1.41	1.39	1.38	1.36	1.32	1.30	100
150	1.45	1.44	1.41	1.39	1.37	1.34	1.33	1.31	1.27	1.24	150
300	1.41	1.39	1.36	1.34	1.32	1.30	1.28	1.26	1.21	1.17	300
1000	1.38	1.36	1.33	1.31	1.29	1.26	1.24	1.22	1.16	1.110	1000
*	45	50	60	70	80	100	120	150	300	1000	*

of this table



المراجع
References

مراجع باللغة الأجنبية

[1] C.G and S. G ,An Introduction to Probability Theory, Univ. Jyvaskyla, 2006.
[2] D.H.YOUNG and S.D.AL-SAADI, Statistical Theory And Methods,volume1,1983.
[3] J.Walrand, Lecture Notes on Probability Theory,univ. California, August, 2004.
[4] L. Breiman, Probability, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1968.
[5] P. Bremaud, An Introduction to Probability Modeling, Springer Verlag, 1988.
[6] W. Feller, Introduction to Probability Theory and its Application, Wiley, New York.

مراجع باللغة العربية

[7] صبري،عزام،التحليل الإحصائي بين النظرية والتطبيق،الأردن –اربد 2003م.
[8] محمد محمد المزاح ،مبادئ الإحصاء والاحتمالات ،صنعاء 2008م.
[9] صالح، أبوعبدالله ،الإحصاء الرياضي لطلبة كلية العلوم الاقتصادية،2006م .
[10] مصطفى،عبد الحفيظ محمد،نظرية التقدير،الجماهيرية الليبية،2000م.
Htt://www.math.unb.ca/~knight/utility/f5.htm [11]

مقدمة في نظرية الإحتمالات

Introduction to Probability Theory

9 789957 067397

دار المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة
www.massira.jo